

Cours de Géométrie Différentielle L3

20016-2017

Pierre Mounoud

22 janvier 2019

Bibliographie

- [1] Michèle Audin, *Géométrie*, Collection enseignement sup, EDP sciences 2006
- [2] Marcel Berger, Bernard Gostiaux , *Géométrie Différentielle : variétés, courbes et surfaces*, Presses universitaires de France, 2eme édition corrigée - 1992
- [3] Henri Cartan, *Formes différentielles. Applications élémentaires au calcul des variations et à la théorie des courbes et des surfaces*. Hermann, Collection Méthodes, 1967.
- [4] Manfredo Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- [5] Manfredo Do Carmo, *Differential forms and applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [6] Wolfgang Kühnle, *Differential geometry. Curves – surfaces – manifolds*, Student Mathematical Library, 16. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002
- [7] Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Collection Grenoble science, EDP sciences 1996
- [8] Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1965.

Chapitre 1

Courbes, étude locale.

On se place dans $\mathbb{R}^n$ que l'on munit du produit scalaire canonique (celui pour lequel la base canonique est orthonormée) que l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $\|\cdot\|$ et d la norme et la distance associées. Dans ce chapitre, lorsque l'on considèrera une distance, il s'agira toujours de celle-ci.

1.1 Arcs paramétrés, arcs géométriques.

Définition 1.1.1 1) On appelle arc paramétré de classe C^k ($0 \leq k \leq \infty$) de $\mathbb{R}^n$, un couple (I, f) où I est un intervalle ouvert et f est une application de classe C^k de I dans $\mathbb{R}^n$.

On aimerait pouvoir séparer les propriétés du paramétrage des propriétés de la courbe proprement dite. Autrement dit, ce n'est pas la façon de parcourir le chemin qui nous intéresse mais le chemin lui même.

Définition 1.1.2 On dit que deux arcs paramétrés de classe C^k (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique (de classe C^k) A s'il existe un difféomorphisme θ de J dans I de classe C^k tel que $g = f \circ \theta$. Le sous-ensemble $f(I)$ est appelé le support de A .

On rappelle que $\theta : J \rightarrow I$ est un difféomorphisme de classe C^k , $k \geq 1$ si et seulement si θ est surjective de classe C^k et vérifie $\forall t \in J, \theta'(t) \neq 0$ (et donc $\theta' > 0$ ou $\theta' < 0$ sur tout J).

On dit que A est un arc géométrique paramétré par (I, f) (ou (J, g)) et que θ est un changement de paramétrage.

Remarque : Si (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique alors $f(I) = g(J)$ mais la réciproque est fausse. Il existe des arcs paramétrés ayant même support mais ne définissant pas le même arc géométrique, comme le montre la figure 1.1.

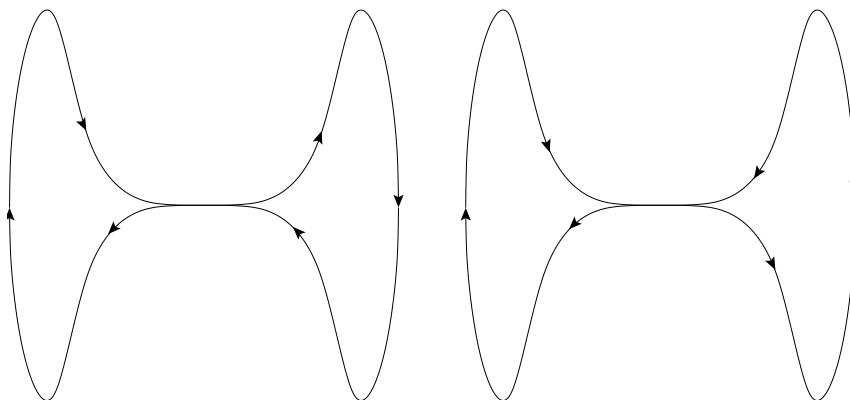


FIGURE 1.1 – Deux arcs différents ayant même support.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Montrer que les arcs $(I =]0, 3\pi[, f|_I)$ et $(J =]0, 5\pi[, f|_J)$ ont même support mais ne définissent pas le même arc géométrique.

Définition 1.1.3 On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) définissent un même arc géométrique orienté si f est obtenu à partir de g par un changement de paramétrage croissant.

Sur un arc géométrique orienté on se souvient en plus du sens dans lequel la courbe est parcourue.

Remarque : La relation « (I, f) et (J, g) définissent un même arc (orienté ou non) » est une relation d'équivalence sur l'espace des arcs paramétrés. Ainsi un arc géométrique (orienté ou non) est une classe d'équivalence d'arcs paramétrés. De même, un point d'un arc géométrique est aussi une classe d'équivalence :

Définition 1.1.4 Un point d'un arc géométrique A est une classe d'équivalence de triplets (I, f, t) où (I, f) est un paramétrage de A et $t \in I$, pour la relation d'équivalence $(I, f, t) \sim (J, g, s)$ s'il existe un changement de paramétrage θ tel que $g = f \circ \theta$ et $t = \theta(s)$. L'élément commun $f(t) = g(s)$ est l'image du point.

La notation (I, f, t) étant trop lourde, on dira simplement soit $p = f(t)$ un point de A . On fera attention cependant à ne pas confondre un point et son image. Les arcs de la figure 1.1 possèdent des points distincts ayant même image.

Sauf mention contraire, les applications considérées dans la suite seront toujours lisses, c'est-à-dire de classe C^∞ . On omettra donc l'adjectif « lisse » dans les expressions « arc paramétré lisse » et « arc géométrique lisse ».

1.2 Tangente, plan osculateur.

Définition 1.2.1 Soient A un arc géométrique défini par le paramétrage (I, f) et $p = f(t)$ un point de A .

- Si $f'(t) \neq 0$, on dit que p est un point régulier de A .
- La droite passant par p et de vecteur directeur $f'(t)$ est alors appelée la tangente en p à A .
- Si tous les points de A sont réguliers, on dira que A est régulier.

Ces propriétés ne dépendent heureusement pas du paramétrage choisi. En effet, soit (I, f) et (J, g) deux paramétrages de A et $\theta : I \rightarrow J$ le changement de paramétrage associé (c-à-d. l'application vérifiant $f = g \circ \theta$). Pour tout $t \in I$, on a

$$f'(t) = (g \circ \theta)'(t) = \theta'(t)g'(\theta(t)).$$

Comme $\theta'(t) \neq 0$, on voit donc que $f'(t) \neq 0$ si et seulement si $g'(\theta(t)) \neq 0$ et que les vecteurs $f'(t)$ et $g'(\theta(t))$ sont colinéaires.

Dans la suite, on va très souvent se limiter à l'étude des arcs réguliers. D'une part cela va exclure les points de rebroussement et autres singularités et d'autre part cela va limiter beaucoup le nombre d'arcs ayant un même support.

Exercice 2 — Soient $k \in \mathbb{N}$ et (I, f) un paramétrage d'un arc régulier. Soit I_k l'image réciproque de I par $\rho_k : t \mapsto t^{2k+1}$. Montrer que si $0 \in I$ et si $k \neq k'$ alors $(I_k, f \circ \rho_k)$ et $(I_{k'}, f \circ \rho_{k'})$ ne définissent pas le même arc géométrique.

- Soient A et B deux arcs géométriques réguliers dont le support est $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$. Montrer que $A = B$.
- Étendre ce résultat à tout arc dont le support est l'image de D par un difféomorphisme (lisse) de $\mathbb{R}^2$.

Par contre les deux arcs de la figure 1.1 peuvent être vus comme des arcs réguliers distincts ayant même support.

Définition 1.2.2 Soient A un arc géométrique régulier, (I, f) un paramétrage de A et $p = f(t)$ un point de A .

- Un point p est dit *birégulier* si $f'(t)$ et $f''(t)$ sont linéairement indépendants. Sinon on dit qu'il s'agit d'un point d'inflexion.
- Si p est birégulier, le plan engendré par $f'(t)$ et $f''(t)$ est appelé le plan osculateur à A au point p .
- Si tous les points de A sont biréguliers alors A est dit *birégulier*.

Vérifions à nouveau, que tout ceci ne dépend pas du choix du paramétrage :

Soient (I, f) et (J, g) deux paramétrages de A et θ le changement de paramétrage associé. On se place en un point $p = f(t) = g(s)$ avec $s = \theta(t)$. D'après la règle de dérivation des applications composées, on a :

$$\begin{aligned} f''(t) &= (g \circ \theta)''(t) = \theta'(t)^2 g''(\theta(t)) + \theta''(t) g'(\theta(t)) = \theta'(t)^2 g''(s) + \theta''(t) g'(s); \\ g''(s) &= (f \circ \theta^{-1})''(s) = (\theta^{-1})'(s)^2 f''(\theta^{-1}(s)) + (\theta^{-1})''(s) f'(\theta^{-1}(s)). \end{aligned}$$

On a donc $f''(t) \in \text{Vect}(g'(s), g''(s))$ et $g''(s) \in \text{Vect}(f'(t), f''(t))$. On vient de voir que $f'(t)$ et $g'(s)$ sont colinéaires donc $\text{Vect}(f'(t), f''(t)) = \text{Vect}(g'(s), g''(s))$.

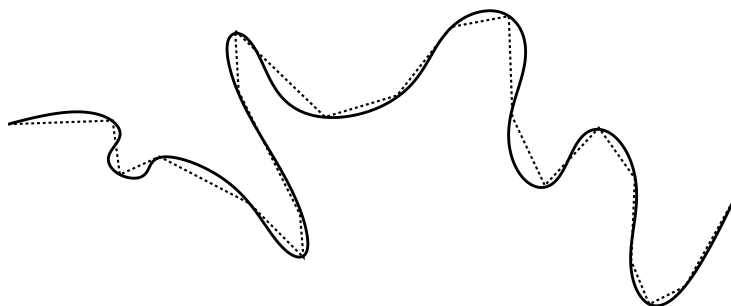
Soient A un arc birégulier de $\mathbb{R}^n$ et P un plan affine de $\mathbb{R}^n$ de direction $\vec{P}$. Il est évident que si $A \subset P$ alors $\vec{P}$ est le plan osculateur à A en tout point. Réciproquement :

Exercice 3 Montrer qu'un arc birégulier de $\mathbb{R}^n$ ayant même plan osculateur en tout point est contenu dans un plan affine (on pourra utiliser une application linéaire de noyau le plan osculateur).

Exercice 4 Donner une définition de point trirégulier d'un arc géométrique et montrer que cette propriété ne dépend pas du paramétrage.

1.3 Longueur d'arc.

On veut définir maintenant la longueur d'un arc, mais, a priori, on ne sait calculer que la longueur des lignes polygonales. Il est cependant possible d'approcher un arc A par des lignes polygonales comme ceci :



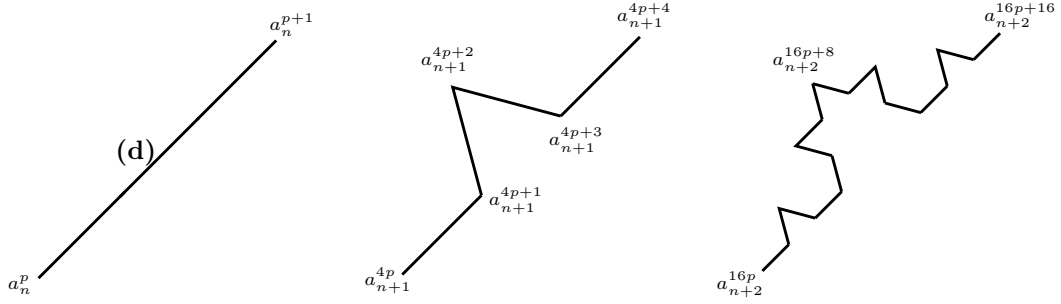
Dans une telle situation, on voit que la longueur de la ligne polygonale est inférieure à celle de A (bien qu'elle ne soit pas encore définie), mais que l'on peut facilement modifier cette ligne de façon à la rapprocher de A . On arrive ainsi à la définition suivante :

Définition 1.3.1 Soient (I, f) un arc paramétré (a priori seulement continu), $[a, b] \subset I$, δ une subdivision de $[a, b]$ (ie la donnée $(a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b)$) et $L_\delta(f([a, b])) = \sum_{i=0}^{l-1} d(f(t_i), f(t_{i+1}))$ (rappelons que d désigne la distance usuelle).

On définit $L(f([a, b]))$, la longueur de $f|_{[a, b]}$ par

$$L(f([a, b])) = \sup_{\delta} L_\delta(f([a, b])).$$

Si ce nombre est fini, on dit que l'arc est rectifiable.

**Remarques :**

- 1) Un changement de paramétrage θ réalise une bijection entre les subdivisions de $[a, b]$ et celle de $\theta([a, b])$. On en déduit que la longueur d'un arc paramétré est invariante par reparamétrage. On peut donc parler de la longueur d'un arc géométrique.
- 2) Si (I, f) un arc paramétré qui n'est pas un segment de droite alors l'inégalité triangulaire prouve que $L(f(I)) > d(f(a), f(b))$. On retrouve le fait que le plus court chemin entre deux points est la ligne droite. Autrement dit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n$, $d(x, y)$ est le minimum des longueurs des arcs joignant x et y et ce minimum n'est atteint que par la ligne droite.

Contrairement à ce que l'on pourrait imaginer, un arc paramétré *compact* et continu n'est pas forcément rectifiable. La courbe de Koch donne un exemple particulièrement pathologique :

Exemples 1.3.2 La courbe de Koch est obtenue à partir d'un segment de droite, en modifiant récursivement chaque segment de droite de la façon suivante :

- 1) on divise le segment de droite en trois segments de longueurs égales,
- 2) on construit un triangle équilatéral ayant pour base le segment médian de la première étape,
- 3) on supprime le segment de droite qui était la base du triangle de la deuxième étape.

On peut voir cette construction comme suit : cet arc est paramétré par une fonction qui est la limite d'une suite de fonctions affines par morceaux $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. L'image de f_n est une ligne polygonale ayant $4^n + 1$ sommets, notés $a_n^0, \dots, a_n^{4^n+1}$.

Cette suite (f_n) satisfait au critère de Cauchy uniforme et donc qu'elle converge vers une fonction continue f_∞ . Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points $a_n^0, \dots, a_n^{4^n+1}$ sont des points de l'arc paramétré par f_∞ (ils ne bougent plus après leur apparition), on sait que $L(f_\infty([0, 1])) \geq L(f_n([0, 1])) = (4/3)^n$. La courbe de Koch n'est donc pas rectifiable. Mieux ! Si $[a, b] \subset [0, 1]$ et $a \neq b$, on a encore $L(f_\infty([a, b])) = +\infty$.

Ce n'est pas le genre de situation que nous allons rencontrer ; en effet les arcs compacts et lisses (en fait C^1) sont rectifiables. Si on a affaire à un arc différentiable, le calcul différentiel suggère une autre façon d'approcher l'arc $([a, b], f)$ à partir d'une subdivision $(a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b)$: remplacer la restriction de f à $[t_i, t_{i+1}]$ par la fonction affine $t \mapsto f(t_i) + (t - t_i)f'(t_i)$.

Ce nouvel arc n'est plus continu, mais sa comparaison avec l'arc polygonal précédent permet de montrer le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 Soient (I, f) un arc paramétré continu et $[a, b] \subset I$ tels que f est de classe C^1 sur $]a, b[$. L'arc $f([a, b])$ est rectifiable si et seulement si l'intégrale (éventuellement) généralisée $\int_a^b \|f'(t)\| dt$ est convergente. On a alors $L(f([a, b])) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$. En particulier, si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $L(f([a, b])) < +\infty$.

Notons ce que ce résultat a de satisfaisant : il affirme que la distance parcourue est obtenue en intégrant la vitesse. Quoi de plus naturel ? Remarquons aussi que la formule de changement de variable nous dit que l'intégrale présente dans l'énoncé ci-dessus est invariante par changement de paramétrage C^1 .

Preuve : Supposons tout d'abord que f est de classe C^1 sur tout $[a, b]$. Le segment $[a, b]$ est

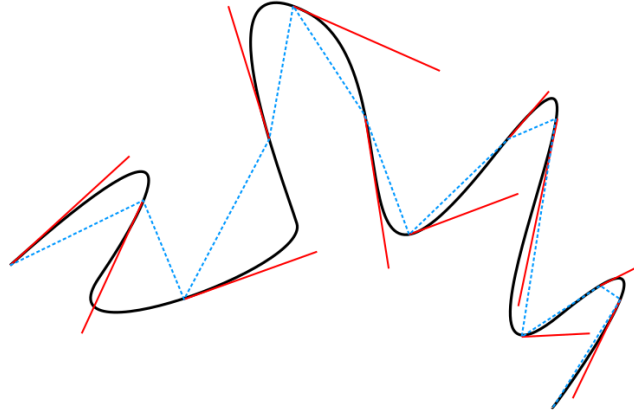


FIGURE 1.2 – Les deux façons d’approcher un arc lisse à partir d’une subdivision

compact et l’application f' est continue donc la restriction de f' à $[a, b]$ est uniformément continue i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (t_1, t_2) \in [a, b], \|t_1 - t_2\| < \eta \Rightarrow \|f'(t_1) - f'(t_2)\| < \varepsilon.$$

En appliquant la formule des accroissements finis à l’application $t \mapsto f(t) - tf'(t_2)$, on en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (t_1, t_2) \in [a, b], \|t_1 - t_2\| < \eta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2) - (t_1 - t_2)f'(t_2)\| \leq \varepsilon |t_1 - t_2|. \quad (*)$$

On note Δ l’ensemble des subdivisions $\delta = \{t_i\}$ de $[a, b]$. Si on se donne $\eta > 0$, on note Δ_η l’ensemble des subdivisions de $[a, b]$ telles que pour tout i on a $t_{i+1} - t_i < \eta$. On commence par montrer qu’il revient au même de travailler avec Δ ou Δ_η (et cela quelque soit η). Autrement dit :

Lemme 1.3.4

$$\sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta\} = \sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta_\eta\}.$$

Preuve du lemme 1.3.4 Comme $\Delta_\eta \subset \Delta$, on a $\sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta\} \geq \sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta_\eta\}$. Pour tout $\delta = \{t_0 < \dots < t_l\} \in \Delta$, il est facile de trouver $\delta' = \{t'_0 < \dots < t'_{l'}\} \in \Delta_\eta$ tel que pour tout $i \in \{0, 1, \dots, l\}$, il existe $j_i \in \{0, 1, \dots, l'\}$ tels que $t_i = t'_{j_i}$ (on rajoute suffisamment de points). L’inégalité triangulaire nous dit que $L_\delta(f([a, b])) \leq L_{\delta'}(f([a, b]))$. Ce qui implique que $\sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta\} \leq \sup\{L_\delta(f([a, b])), \delta \in \Delta_\eta\}$. Le lemme est montré. $\square$

Soit $\varepsilon > 0$ et soient $\eta > 0$ donné par (*) et $\delta \in \Delta_\eta$. On commence par écrire

$$\begin{aligned} \left| L_\delta(f([a, b])) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| &\leq \left| L_\delta(f([a, b])) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| \\ &\quad + \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right|. \end{aligned}$$

Comme $\delta \in \Delta_\eta$, par (*) on obtient :

$$\left| L_\delta(f([a, b])) - \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| \right| \leq \varepsilon(b - a).$$

Par ailleurs, c’est une propriété bien connue de l’intégrale de Riemann qu’il existe $\eta' > 0$ tel que

$$\delta \in \Delta_{\eta'} \Rightarrow \left| \sum_i (t_{i+1} - t_i) \|f'(t_i)\| - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en posant $\eta_0 = \min\{\eta, \eta'\}$, on obtient que pour tout $\delta \in \Delta_{\eta_0}$:

$$\left| L_\delta(f([a, b])) - \int_a^b \|f'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon(1 + (b - a)).$$

Ainsi, en prenant le sup sur les $\delta \in \Delta_{\eta_0}$ (en utilisant 1.3.4) et en faisant tendre ε vers 0, on a finalement :

$$L(f([a, b])) = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

On suppose maintenant que f est de classe C^1 seulement sur $]a, b]$ (le cas où f est C^1 sur seulement $]a, b[$ s'en déduit facilement). D'après ce qui précède, pour tout $0 < \varepsilon < b - a$, on sait que $L(f([a + \varepsilon, b])) = \int_{a+\varepsilon}^b \|f'(t)\| dt$. Comme $L(f([a, b])) \geq L(f([a + \varepsilon, b]))$, on a :

$$L(f([a, b])) \geq \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Si $f([a, b])$ est rectifiable, on voit donc que l'intégrale converge. Il ne nous reste plus qu'à montrer que si l'intégrale converge alors l'arc est rectifiable et à déterminer sa longueur.

On suppose donc que $\int_a^b \|f'(t)\| dt < +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue en a donc il existe $\eta > 0$ tel que si $|t - a| < \eta$ alors $d(f(t) - f(a)) \leq \varepsilon$. Si $\delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_l = b\} \in \Delta_\eta$ alors

$$\begin{aligned} L_\delta(f([a, b])) &= d(f(a), f(t_1)) + \sum_{i \geq 0} d(f(t_i), f(t_{i+1})) \\ &\leq \varepsilon + L(f[t_1, b]) \\ &\leq \varepsilon + \int_a^b \|f'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant le sup pour les $\delta \in \Delta_\eta$ puis en faisant tendre ε vers 0, on a :

$$L(f([a, b])) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt. \quad \square$$

Exemples 1.3.5 1) On considère la parabole plane paramétrée par $f : t \mapsto (t^2/2, t)$. Calculons $L(f([0, x]))$. D'après le théorème 1.3.3, on a :

$$L(f([0, x])) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 1} dt$$

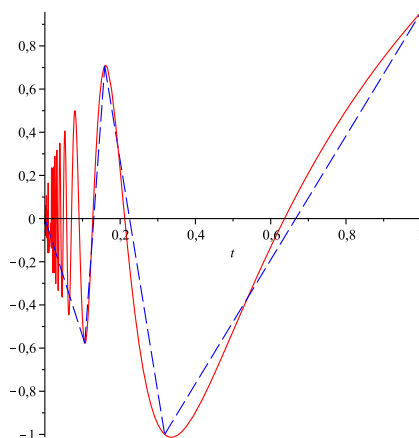
En utilisant le changement de variable $t = \sinh u$ et les égalités $\cosh^2 u = \frac{1 + \cosh(2u)}{2}$ et $\sinh(2 \arg \sinh(x)) = x\sqrt{x^2 + 1}$, on a donc :

$$\begin{aligned} L(f([0, x])) &= \int_0^{\arg \sinh x} \cosh^2 u du = \int_0^{\arg \sinh x} \frac{1 + \cosh(2u)}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \left[u + \frac{\sinh(2u)}{2} \right]_0^{\arg \sinh x} = \frac{\arg \sinh x}{2} + \frac{\sinh(2 \arg \sinh(x))}{2} \\ &= \frac{\arg \sinh x}{2} + \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{2}. \end{aligned}$$

2) Considérons maintenant l'arc paramétré continu $(\mathbb{R}, f)$, où f est définie pour $t \neq 0$ par $f(t) = (t, \sqrt{\pi} t \cos(1/t))$ et par $f(0) = (0, 0)$ (voir figure 1.3). La fonction f est lisse sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mais seulement continue en 0. On peut appliquer le théorème 1.3.3 et donc

$$L(f([0, 1])) = \int_0^1 \|f'(s)\| ds.$$

Voyons (géométriquement) que cette intégrale généralisée diverge. Par définition, la longueur de cet arc est supérieure à la longueur de la ligne polygonale P_m de sommets les points $f(0)$, $f(\frac{1}{n\pi})$, $n \in \{1, \dots, m\}$ et $f(1)$. En utilisant le théorème de Pythagore, on voit que la longueur de cette ligne polygonale est supérieure à $2 \sum_{n=1}^m \frac{1}{\sqrt{n}}$. Mais cette série diverge donc cet arc n'est pas non plus rectifiable, bien que $f|_{[0,1]}$ soit de classe C^1 .

FIGURE 1.3 – le graphe de $t \mapsto \sqrt{\pi t} \cos(1/t)$ et la ligne polygonale P_3

Dans la suite, la notion de longueur d'arc va surtout être utilisée pour trouver des paramétrages plus agréables que les autres parmi tous les paramétrages d'un arc régulier A donné.

Définition 1.3.6 On dit que (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc (ou une abscisse curviligne) si pour tout $(t, t_0) \in I^2$, on a $t - t_0 = L(f([t, t_0])) = \int_{t_0}^t \|f'(s)\| ds$.

Il est évident que ceci est équivalent à $\|f'(t)\| = 1$ pour tout $t \in I$. De même il est clair que si f et g sont deux paramétrages par longueur d'arc de A , alors l'application θ telle que $g = f \circ \theta$ est de la forme $\theta(t) = \pm t + C$.

Proposition 1.3.7 Tout arc géométrique A lisse et régulier admet un paramétrage par longueur d'arc.

Preuve : Soit (I, f) un paramétrage régulier de A et φ la fonction définie par $\varphi(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$. Comme pour tout $t \in I$, $f'(t) \neq 0$, la fonction φ est lisse et sa dérivée est strictement positive.

Il s'agit donc d'un difféomorphisme lisse de I sur $J = \varphi(I)$. Soit $\theta : J \rightarrow I$ sa fonction réciproque, qui est, elle aussi, lisse. On vérifie que pour tout $s \in J$, $\|(f \circ \theta)'(s)\| = 1$. On a donc bien un paramétrage par longueur d'arc, ce qui termine la preuve.

Remarquons que si (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc d'un arc A alors pour tout $t \in I$, on a $\langle f'(t), f''(t) \rangle = 0$ (car l'application $t \mapsto \|f'(t)\|^2$ est constante). Cette propriété sera souvent utilisée dans la suite.

Exemples 1.3.8 — Le paramétrage par longueur d'arc le plus connu est sans doute celui du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ qui est donné par $s \mapsto (\cos(s), \sin(s))$ (où s est en radians bien-sûr). Ce qui précède donne une explication du fait que les fonctions cosinus et sinus sont lisses : ce sont les composantes d'un paramétrage par longueur d'arc d'un arc lisse.

- Pour paramétrer le cercle de rayon r et de centre 0 , on modifie le paramétrage précédent en $s \mapsto (r \cos(s/r), r \sin(s/r))$. Maintenant, si on se donne un plan P dans $\mathbb{R}^n$, un point p dans P et $r > 0$, comment trouver le paramétrage du cercle contenu dans P de centre p et de rayon r ?
- Pour obtenir le paramétrage par longueur d'arc de la parabole, il suffirait (!) de trouver la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto \frac{\arg \sinh x}{2} + \frac{x\sqrt{x^2+1}}{2}$.

Rappel : On dit qu'une application $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une isométrie si elle préserve la distance, c'est-à-dire si elle vérifie pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$, $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$.

Les isométries linéaires sont bien connues. Une application linéaire $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une isométrie si et seulement elle préserve le produit scalaire. Autrement dit, si sa matrice M vérifie ${}^tMM = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n . Une telle matrice est dite *orthogonale*. L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n forme un groupe noté $O(n)$. Il s'agit en fait des seules isométries de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.3.9 Une isométrie F de $\mathbb{R}^n$ préserve les longueurs des arcs et envoie droite sur droite.

Preuve : Soit (I, f) un arc paramétré et $[a, b] \subset I$. On revient à la définition 1.3.1 dont on reprend les notations. Pour toute subdivision δ de $[a, b]$, il est évident que $L_\delta(f([a, b])) = L_\delta(F \circ f([a, b]))$, par conséquent $L(f([a, b])) = L(F \circ f([a, b]))$.

D'après ce qui précède, une isométrie envoie le plus court chemin entre deux points sur le plus court chemin entre les images de ces deux points. Elle envoie donc droite sur droite. $\square$

Théorème 1.3.10 Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une isométrie alors F est une application affine dont la partie linéaire appartient au groupe orthogonal.

Preuve : D'après la proposition 1.3.9, F envoie droite sur droite. De plus le théorème de Pythagore nous dit qu'elle envoie triangle rectangle sur triangle rectangle. Il s'ensuit que F envoie un repère orthonormé $(O, e_1, \dots, e_n)$ sur un repère orthonormé $(F(O), u_1, \dots, u_n)$. Soit G l'isométrie affine envoyant $(F(O), u_1, \dots, u_n)$ sur $(O, e_1, \dots, e_n)$. L'application $G \circ F$ est une isométrie envoyant $(O, e_1, \dots, e_n)$ sur elle-même. On va montrer que $G \circ F$ est égale à l'identité et donc que F est affine.

D'après ce qui précède, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\text{vect}(e_1, \dots, e_k) = \{e_{k+1}, \dots, e_n\}^\perp$ est préservé par $G \circ F$. On montre par récurrence (finie) que la restriction de $G \circ F$ à $\text{vect}(e_1, \dots, e_k)$ est l'identité pour tout $1 \leq k \leq n$. Il est clair que $F(te_1) = te_1$ pour tout réel t , ce qui initialise la récurrence. Considérons le rang $k+1$ en supposant le résultat vrai au rang k . Considérons alors $x = x_1e_1 + \dots + x_k e_k + x_{k+1}e_{k+1} = y + x_{k+1}e_{k+1}$. La droite passant par y de vecteur directeur e_{k+1} est envoyée par $G \circ F$ sur la droite de $\text{vect}(e_1, \dots, e_{k+1})$ passant par y et perpendiculaire à $\text{vect}(e_1, \dots, e_k)$, c'est-à-dire elle-même. Comme $G \circ F(x)$ est à distance $|x_{k+1}|$ de $G \circ F(y) = y$, on a donc $\|G \circ F(x) - G \circ F(x_{k+1}e_{k+1})\| = \|y \pm x_{k+1}e_{k+1} - x_{k+1}e_{k+1}\| = \|x - x_{k+1}e_{k+1}\| = \|y\|$, d'où $G \circ F(x) = x$. $\square$

Exercice 5 Montrer qu'une application $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $dF(x) \in O(n)$ est affine (ce qui montre que toute application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $GL(n, \mathbb{R})$ n'admet pas une primitive ie n'est pas la différentielle d'une application).

1.4 Courbure

1.4.1 Définition

Définition 1.4.1 Soit A un arc géométrique régulier, (I, f) un paramétrage de A par longueur d'arc et $p = f(t)$ un point de A . La courbure de A en p est le réel positif $K_A(p)$ défini par

$$K_A(p) = \|f''(t)\|$$

On a vu plus haut que si (J, g) est un autre paramétrage de A obtenu par un changement de paramétrage θ et si $p = f(t) = g(s)$ alors

$$g''(s) = \theta'(s)^2 f''(t) + \theta''(s) f'(t).$$

Rappelons que si (J, g) est lui aussi un paramétrage par longueur d'arc alors $\theta'(s) = \pm 1$ et $\theta''(s) = 0$. On a alors $g''(s) = f''(t)$.

Exemples 1.4.2 L'hélice circulaire H paramétrée par $(\mathbb{R}, f)$, $f : t \mapsto (a \cos t, a \sin t, bt)$ est à courbure constante. En effet, pour tout t , on a $\|f'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Le paramétrage

$$g : t \mapsto (a \cos(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}), a \sin(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

est donc un paramétrage par longueur d'arc. Dérivons :

$$\begin{aligned} g'(t) &= (-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}), \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) \\ g''(t) &= -\frac{a}{a^2+b^2} (\cos(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}), \sin(\frac{t}{\sqrt{a^2+b^2}}), 0). \end{aligned}$$

On a donc pour tout $p \in H$, $K_H(p) = \frac{|a|}{a^2+b^2}$, si $a \neq 0$.

La courbure est (relativement) facile à déterminer à partir d'un paramétrage par longueur d'arc. Hélas, il est presque toujours impossible d'obtenir explicitement un tel paramétrage. On voudrait donc calculer la courbure à partir d'un paramétrage quelconque. Pour cela il suffit d'exprimer θ' et θ'' en fonction de g' et g'' . D'une part

$$\|g'(s)\| = \|\theta'(s)f'(t)\| = |\theta'(s)|.$$

D'autre part en dérivant $|\theta'(s)|^2 = \langle g'(s), g'(s) \rangle$, on obtient :

$$2\theta'(s)\theta''(s) = 2\langle \theta'(s)f'(t), g''(s) \rangle, \text{ d'où } \theta''(s) = \langle f'(t), g''(s) \rangle.$$

En notant τ le vecteur $f'(t)$ (il est de norme 1 et vérifie $\tau = \pm \frac{g'(s)}{\|g'(s)\|}$) on obtient :

$$\begin{aligned} g''(s) &= \|g'(s)\|^2 f''(t) + \langle g''(s), \tau \rangle \tau, \\ f''(t) &= \frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2} - \left\langle \frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2}, \tau \right\rangle \tau. \end{aligned}$$

Autrement dit, $f''(t)$ est le projeté orthogonal de $\frac{g''(s)}{\|g'(s)\|^2}$ sur $\tau^\perp$. Comme f'' et τ sont perpendiculaires, en développant $\langle g''(s), g''(s) \rangle$ on obtient :

$$K_A(p)^2 = \|f''(t)\|^2 = \left(\frac{\|g''(s)\|}{\|g'(s)\|^2} \right)^2 - \left(\frac{\langle g'(s), g''(s) \rangle}{\|g'(s)\|^3} \right)^2.$$

Application : La courbure de la parabole paramétrée par $f : t \mapsto (t^2/2, t)$ en 0 est 1. En effet $f'(0) = (0, 1)$ et $f''(0) = (1, 0)$.

La courbure est une notion métrique, en tant que telle elle est invariante par isométries, plus précisément :

Proposition 1.4.3 *Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie, A un arc géométrique régulier et p un point de A . La courbure de A au point p est égale à la courbure de $F(A)$ au point $F(p)$.*

1.4.2 cercle osculateur

Définition 1.4.4 *Soient A et B deux arcs géométriques réguliers. On dit que A et B ont un contact d'ordre k en p s'il existe des abscisses curvilignes (I, f) et (J, g) respectivement sur A et B telles que $f(0) = g(0)$ et que $d(f(s), g(s)) = o(s^k)$ au voisinage de 0.*

Remarque 1.4.5 — *Il s'agit d'une relation d'équivalence (l'inégalité triangulaire donne la transitivité).*

- *Deux arcs géométriques réguliers A et B ont un contact d'ordre k en p si et seulement si il existe (I, f) et (J, g) des paramétrages par longueur d'arc de A et B tels que $f(0) = g(0) = p$ et que f et g ont même développement de Taylor à l'ordre k en 0.*

Deux arcs géométriques ont un contact d'ordre 1 en p si et seulement s'ils sont tangents en p c'est-à-dire s'ils ont même tangente en p . Lorsque deux arcs ont un contact d'ordre 2 en p , on dit que les arcs sont *osculateurs*. On cherche un objet qui pourrait jouer le rôle de la tangente pour les contacts d'ordre 2, il nous faut quelque chose de degré (au moins) 2, on pense donc à un cercle.

Proposition 1.4.6 *Soient p un point d'un arc géométrique régulier A et (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc de A tel que $p = f(0)$.*

- *Si p est un point d'inflexion alors la tangente en p est osculatrice.*
- *Si p est birégulier, alors il existe un unique cercle osculateur à A en p . Il s'agit du cercle contenu dans le plan osculateur, de rayon $\frac{1}{K_A(p)}$ et de centre $f(0) + \|K_A(p)\|^{-2} f''(0)$.*

1. Ainsi $\|g'(s)\|^2 K_A(p)$ est la norme de la partie centripète de l'accélération, la partie de l'accélération qui « fait tourner ».

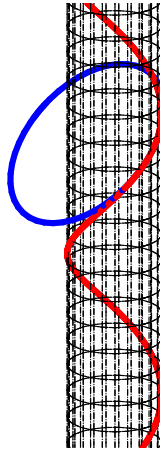


FIGURE 1.4 – Hélice avec un cercle osculateur.

Preuve : Supposons que p soit un point d'inflexion, on a alors $f''(0) = 0$. On voit que la tangente en p est osculatrice en la paramétrant par $(\mathbb{R}, g)$ avec $g(t) = f(0) + tf'(0)$. En effet, f et g ont même développement de Taylor à l'ordre 2.

Supposons p birégulier i.e. $f''(0) \neq 0$. D'après la remarque 1.4.5, on cherche les cercles admettant un paramétrage par longueur d'arc (J, h) tel que $h(0) = f(0)$, $h'(0) = f'(0)$ et $h''(0) = f''(0)$.

Soit C le cercle de $\mathbb{R}^n$ de centre a de rayon R contenu dans le plan de direction $\text{Vect}\{u, v\}$. Si $\{u, v\}$ est orthonormée alors C admet pour paramétrage par longueur d'arc

$$h : s \mapsto a + R \cos(s/R)u + R \sin(s/R)v.$$

On voit que la donnée des trois vecteurs $(h(0), h'(0), h''(0))$ détermine a , R , u et v et donc C . En effet, comme $h(0) = a + Ru$, $h'(0) = v$ et $h''(0) = -\frac{1}{R}u$, on a $v = h'(0)$, $u = -\frac{1}{\|h''(0)\|}h''(0)$, $R = \frac{1}{\|h''(0)\|}$ et $a = h(0) + \frac{1}{\|h''(0)\|^2}h''(0)$. On en déduit que le cercle osculateur est le cercle paramétré par :

$$h(t) = f(0) + R^2 f''(0) - R \cos(t/R) R f''(0) + R \sin(t/R) f'(0),$$

où $R = \frac{1}{\|f''(0)\|}$. Il s'agit bien du cercle donné dans l'énoncé. $\square$

Le cercle osculateur est donc le cercle le plus collé à A en p . Il montre de combien tourne la courbe en ce point. Cela se voit bien sur la figure 1.4.

Exercice 6 Montrer qu'un arc géométrique régulier est une droite si et seulement sa courbure est partout nulle.

Soit (I, f) une abscisse curviligne d'un arc A à courbure constante non nulle. Soit $c(t)$ le centre du cercle osculateur de A au point $f(t)$. Montrer que $c'(t)$ est toujours perpendiculaire au plan osculateur de $f(t)$. Que peut-on dire si on suppose de plus que A est contenu dans un plan ?

1.5 Arcs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

On va avoir besoin dans la suite de considérer des bases orthonormées *directes* de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Rappelons donc qu'une base est dite directe si le déterminant de l'unique endomorphisme qui envoie cette base sur la base canonique est positif.

1.5.1 Arcs de $\mathbb{R}^2$.

Dans le plan orienté, il existe une notion de droite et de gauche (ou, si on veut, de tourner dans le sens direct et de tourner dans le sens indirect). Il doit donc être possible, lorsqu'un arc tourne, de dire s'il tourne vers la droite ou vers la gauche. Pour cela il faut bien-sûr faire attention au

sens de parcours. En effet, si on se retourne, ce qui était à sa gauche est maintenant à sa droite. Formalisons tout cela.

Soit i la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (dans le sens direct). Elle est caractérisée par $\|x\| = \|i(x)\|$, $\langle x, i(x) \rangle = 0$ et $(x, i(x))$ est une base directe.

Définition 1.5.1 Soit A un arc géométrique orienté de $\mathbb{R}^2$ et (I, f) une abscisse curviligne de A . Soit $p = f(t)$ un point de A . La courbure algébrique de A en p est définie par

$$k_A(p) := \langle f''(t), i(f'(t)) \rangle.$$

Propriétés élémentaires :

- Clairement $|k_A(p)| = K_A(p)$.
- On peut aussi déterminer le signe de $k_A(p)$ à l'aide d'un paramétrage quelconque (J, g) (avec la bonne orientation). On vérifiera que $\langle f''(t), i(f'(t)) \rangle$ et $\langle (f \circ \theta^{-1})''(\theta(t)), i((f \circ \theta^{-1})'(\theta(t))) \rangle$ sont de même signe, pour tout θ croissant.
- Si on change l'orientation de A , alors $k_A(p)$ change de signe (on s'est retourné).

Si (I, f) est une abscisse curviligne, il existe une fonction lisse λ telle que $f'(t) = (\cos(\lambda(t)), \sin(\lambda(t)))$ (en fait ce n'est pas si évident que ça en a l'air, mais admettons le). On en déduit que $f''(t) = \lambda'(t)(-\sin(\lambda(t)), \cos(\lambda(t)))$. Donc que $\lambda'(t) = k_A(f(t))$. La courbure algébrique est donc la dérivée de (la mesure de) l'angle de la tangente avec l'horizontale, plus précisément de l'angle orienté que forme le vecteur vitesse avec le vecteur $e_1 = (1, 0)$.

Inversement, si on connaît l'expression de k_A en fonction de la longueur d'arc et $\lambda(0)$ on détermine λ en intégrant. Si on connaît de plus $f(0)$, alors f est obtenue en intégrant $(\cos \circ \lambda, \sin \circ \lambda)$. On a donc montré :

Théorème 1.5.2 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse. Soient $(p, v) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$. Alors il existe un unique arc géométrique A ayant une abscisse curviligne (I, f) telle que $f(0) = p$, $f'(0) = v$ et $\forall t \in I, k_A(f(t)) = c(t)$.

Autrement dit, une courbe plane orientée est déterminée, à une isométrie directe près (ce qui correspond à se donner $f(0)$ et $f'(0)$), par sa courbure algébrique.

1.5.2 Arcs de $\mathbb{R}^3$

On considère maintenant un arc A dans $\mathbb{R}^3$. Cela n'a a priori aucun sens de se demander si A tourne vers la gauche ou la droite en un point car, dans l'espace, la gauche et la droite n'ont plus de sens. Nous utilisons bien au quotidien cette notion de gauche et de droite mais nous avons un haut et un bas, ce qui n'est pas le cas, en général, d'un point de $\mathbb{R}^3$. On va donc commencer par donner un axe « vertical » à tout point de A , ou plutôt un plan « horizontal » ce qui est la même chose, le seul à notre disposition : le plan osculateur. Ensuite, on va définir ce qu'est être au-dessus de ce plan. Une fois notre arc munit d'un tel dispositif on verra ce qu'on peut dire de plus sur celui-ci. . .

Rappel : Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel de x et y , noté $x \wedge y$, est, par définition, l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{R}^3, \langle z, x \wedge y \rangle = \det(x, y, z).$$

Ainsi, en notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les coordonnées de $x \wedge y$ dans cette base sont les $\det(x, y, e_i)$.

L'application $(x, y) \mapsto x \wedge y$ est bilinéaire, antisymétrique et ce produit n'est pas associatif. Il vérifie (exercice)

$$\begin{aligned} \langle x, x \wedge y \rangle &= \langle y, x \wedge y \rangle = 0 \\ \|x \wedge y\|^2 + \langle x, y \rangle^2 &= \|x\|^2 \|y\|^2. \end{aligned}$$

Si x et y sont non nuls, on peut définir φ l'angle (forcément non orienté) entre x et y par $\langle x, y \rangle / \|x\| \|y\| = \cos(\varphi)$. L'égalité ci-dessus s'écrit alors $\|x \wedge y\| = \|x\| \|y\| |\sin(\varphi)|$.

Définition 1.5.3 Soit A un arc birégulier orienté de $\mathbb{R}^3$ et (I, f) une abscisse curviligne de A et $p = f(t)$ un point de A . On appelle trièdre de Frenet de A en p , le triplet $(\tau(p), \nu(p), \beta(p)) \in (\mathbb{R}^3)^3$ défini par $\tau(p) = f'(t)$, $\nu(p) = \frac{1}{\|f''(t)\|} f''(t)$ et $\beta(p) = \tau(p) \wedge \nu(p)$.

Remarquons tout de suite qu'il s'agit d'une base orthonormée directe. Remarquons aussi que ce trièdre n'est pas défini en un point d'inflexion.

Soit (I, f) une abscisse curviligne, pour alléger les notations, on note $(\tau(t), \nu(t), \beta(t))$ le trièdre de Frenet au point $f(t)$ (au lieu de $(\tau(f(t)), \nu(f(t)), \beta(f(t)))$). Regardons comment varient ces repères. Pour cela dérivons la fonction $t \mapsto (\tau(t), \nu(t), \beta(t))$. Sans surprise, on a :

$$\tau'(t) = f''(t) = K_A(t) \nu(t)$$

On a écrit $K_A(t)$ pour $K_A(f(t))$. Les relations $\langle \beta(t), \beta(t) \rangle = 1$ et $\langle \beta(t), \tau(t) \rangle = 0$ donnent par dérivation $\langle \beta'(t), \beta(t) \rangle = 0$ et $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = -\langle \beta(t), \tau'(t) \rangle$. Or $\tau'(t) = K_A(t) \nu(t)$ donc $\langle \beta'(t), \tau(t) \rangle = 0$. Ainsi $\beta'(t)$ est colinéaire à $\nu(t)$. Il existe donc un scalaire noté $T_A(t)$ tel que

$$\beta'(t) = T_A(t) \nu(t).$$

On appelle ce nombre la torsion de A en $f(t)$ (ce qu'on devrait plutôt noter $T_A(f(t))$). De même, en dérivant $\langle \nu(t), \nu(t) \rangle = 1$, $\langle \nu(t), \tau(t) \rangle = 0$ et $\langle \nu(t), \beta(t) \rangle = 0$, on obtient

$$\nu'(t) = -K_A(t) \tau(t) - T_A(t) \beta(t).$$

Ces formules constituent les *formules de Frenet*. Rappelons qu'elles ne sont valables que pour un paramétrage par longueur d'arc.

Exemples 1.5.4 L'hélice circulaire a pour abscisse curviligne

$$g : t \mapsto \left(a \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), a \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{bt}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \tau(t) = g'(t) = \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \nu(t) = g''(t) / \|g''(t)\| = \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), 0 \right), \\ \beta(t) = \tau(t) \wedge \nu(t) = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos\left(\frac{t}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{cases}$$

D'où $\beta'(t) = -\frac{b}{a^2 + b^2} \nu(t)$, ainsi la torsion est constante et vaut $-\frac{b}{a^2 + b^2}$.

Il est facile de déterminer le trièdre de Frenet en un point p à partir d'un paramétrage *quelconque* (J, g) (définissant le même arc *orienté*). Pour cela, il suffit de d'appliquer le processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt au repère $(g'(s), g''(s), g'(s) \wedge g''(s))$, où s vérifie $g(s) = p$. La flèche $s \mapsto (\tau_A(g(s)), \nu_A(g(s)), \beta_A(g(s)))$ définit bien une application lisse de J dans $(\mathbb{R}^3)^3$. Mais attention, *les composantes de la dérivée de cette application ne satisfont pas aux formules de Frenet!*

Comme pour la courbure, il existe une formule permettant de calculer la torsion à partir d'un paramétrage quelconque (J, g) :

$$T = -\frac{\det(g', g'', g''')}{\|g' \wedge g''\|^2}$$

Sa preuve est laissée en exercice (on pourra commencer par montrer cette formule pour les abscisses curvilignes et par montrer qu'elle est invariante par changement de paramétrage).

Interprétation géométrique de la torsion :

Un arc *birégulier* A est contenu dans un plan si et seulement si sa torsion est identiquement nulle. On l'a plus ou moins déjà montré. En effet, la torsion mesure la variation du plan osculateur et on a montré à l'exercice 3 que le plan osculateur est constant si et seulement si l'arc est plan. Remontrons le sens le moins évident. On suppose donc A birégulier et à torsion nulle. On se donne un paramétrage par longueur d'arc (I, f) , on a donc, pour tout $t \in I$, $\beta'(t) = 0$. Il existe donc un vecteur v tel que $\beta(t) = v$. On a $\langle v, \tau(t) \rangle = 0$ d'où $\langle v, f(t) \rangle = \text{Cste}$. La courbe est donc contenue dans un niveau d'une forme linéaire c'est-à-dire dans un plan.

On voit donc que la torsion mesure la tendance qu'a l'arc à sortir de son plan osculateur. Cela se voit encore mieux en regardant le développement limité en un point p . En effet, si (I, f) est un paramétrage par longueur d'arc de A , on a, au voisinage de 0 :

$$f(t) = f(0) + \left(t - \frac{K(0)^2}{6}t^3 + o(t^3)\right) \tau(0) + \left(\frac{K(0)}{2}t^2 + \frac{K'(0)}{6}t^3 + o(t^3)\right) \nu(0) + \left(-\frac{K(0)T(0)}{6}t^3 + o(t^3)\right) \beta(0).$$

On voit bien que si $T_A(0) \neq 0$ alors l'arc traverse strictement son plan osculateur en $f(0)$ (qui est $\text{Vect}(\tau(0), \nu(0))$).

Exercice 7 Dédurre des formules de Frenet la preuve de l'affirmation ci-dessus.

Voyons maintenant ce que l'on peut dire sur le *signe* de la torsion. Si l'arc est parcouru en sens inverse le signe de la torsion est bien-sûr modifié, ce qui limite beaucoup son intérêt. Toutefois, il existe des cas où ce signe est significatif.

On suppose $T(0) \neq 0$. On se place en $f(0)$ dans le repère $(\tau(0), \nu(0), \beta(0))$. On interprète $\tau(0)$ comme le vecteur indiquant la direction « devant », $\nu(0)$ comme celui indiquant la « gauche » et $\beta(0)$ comme celui indiquant le « dessus » (on pensera au triplet pouce, index, majeur de la main droite). Le développement limité ci-dessus nous dit qu'en $f(0)$ on voit toujours la courbe tourner vers la gauche (c.-à-d. que la composante en $\nu(0)$ de $f(t) - f(0)$ est positive) mais qu'on la voit monter si et seulement si la torsion est négative.

Au lieu de se placer dans un repère qui voit tourner la courbe toujours vers la gauche, on aurait pu se placer dans un repère qui voit toujours la courbe monter (c.-à-d. le repère $(\tau(0), -\frac{T(0)}{|T(0)|}\nu(0), -\frac{T(0)}{|T(0)|}\beta(0))$). Cette fois l'arc est à torsion positive s'il spirale vers la droite et à torsion négative s'il spirale vers la gauche.

On voit donc que le signe de la torsion est ce qui différencie les coquilles dextres, des coquilles senestres ou un pas de vis de son image dans un miroir (après s'être mis d'accord sur un sens de parcours, par exemple de la pointe vers la base).



FIGURE 1.5 – coquille senestre et coquille dextre

C'est ce que montre notamment la proposition suivante.

Proposition 1.5.5 Soient $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une isométrie de partie linéaire dF , A un arc géométrique birégulier et p un point de A . On a alors $K_A(p) = K_{F(A)}(F(p))$ et $T_A(p) = \epsilon T_{F(A)}(F(p))$, où désigne par ϵ le signe du déterminant de dF

Preuve : Soit (I, f) un paramétrage par longueur d'arc de A . Le paramétrage $(I, F \circ f)$ est un paramétrage par longueur d'arc de $F(A)$. Comme F est une isométrie, on a :

$$(dF(\tau_A(t)), dF(\nu_A(t)), dF(\beta_A(t))) = (\tau_{F(A)}(t), \nu_{F(A)}(t), \epsilon\beta_{F(A)}(t)),$$

On en déduit que $K_A(t) = K_{F(A)}(t)$ et que $T_A(t) = \epsilon T_{F(A)}(t)$. $\square$

Attention, la torsion n'est définie qu'en les points biréguliers. L'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$ où f est définie par

$$f(t) = \begin{cases} (t, e^{-\frac{1}{t^2}}, 0) & \text{si } t > 0 \\ (t, 0, e^{-\frac{1}{t^2}}) & \text{si } t < 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est lisse, régulier, birégulier sauf en $t = 0$. Sa torsion est nulle partout où elle est définie mais la courbe n'est pas plane !

Pour finir donnons un analogue du théorème 1.5.2. Ce n'est pas l'exact analogue, il ne contient que l'aspect « unicité » et pas le côté « existence ». Cet exact analogue existe, le lecteur curieux pourra consulter, par exemple, le livre de Berger et Gostiaux indiqué dans la bibliographie pour un énoncé et une preuve. Ici, nous nous contenterons de :

Théorème 1.5.6 *Un arc birégulier orienté de $\mathbb{R}^3$ est déterminé, à une isométrie directe près, par sa courbure et sa torsion.*

La preuve de ce théorème découle de la proposition 1.5.5 ci-dessus et de l'exercice 8 qui suit. Ce théorème nous dit, entre autre, que les seuls arcs biréguliers de $\mathbb{R}^3$ ayant une courbure et une torsion constantes sont les hélices circulaires.

Exercice 8 (DS 2011)

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, (I, f_1) et (I, f_2) deux arcs paramétrés par longueur d'arc et biréguliers de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on désigne par $(\tau_i(t), \nu_i(t), \beta_i(t))$, $K_i(t)$ et $T_i(t)$ le repère de Frenet, la courbure et la torsion de (I, f_i) au point $f_i(t)$.

On suppose que pour tout $t \in I$, on a $K_1(t) = K_2(t)$ et $T_1(t) = T_2(t)$, que de plus $f_1(0) = f_2(0)$ et $(\tau_1(0), \nu_1(0), \beta_1(0)) = (\tau_2(0), \nu_2(0), \beta_2(0))$.

1) Montrer que

$$A(t) = \langle \tau_1(t), \tau_2(t) \rangle + \langle \nu_1(t), \nu_2(t) \rangle + \langle \beta_1(t), \beta_2(t) \rangle$$

est constant. Déterminer cette valeur.

2) Montrer que s'il existe $t \in I$ tel que $\tau_1(t) \neq \tau_2(t)$ alors $A(t) < 3$.

3) En déduire que pour tout $t \in I$, $\tau_1(t) = \tau_2(t)$ puis que $f_1 = f_2$.

4) On ne suppose plus que $f_1(0) = f_2(0)$ et $(\tau_1(0), \nu_1(0), \beta_1(0)) = (\tau_2(0), \nu_2(0), \beta_2(0))$. Montrer qu'il existe une isométrie affine F telle que $F \circ f_1 = f_2$.

Chapitre 2

Nappes et sous-variétés.

2.1 Rappels de calcul différentiel (sans preuve)

On notera $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. On rappelle que la base canonique de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est formée des applications $E_{i,j}$ définies par $E_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k} e'_j$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $(e'_1, \dots, e'_p)$ celle de $\mathbb{R}^p$ et $\delta_{i,k}$ est le symbole de Kronecker.

Définition 2.1.1 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable en $x \in U$ s'il existe une application linéaire dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ (la différentielle de f en x) notée $Df(x)$ telle que

$$\|f(x+h) - f(x) - Df(x).h\| = o(\|h\|).$$

L'application $h \mapsto f(x) + Df(x).h$ est la meilleure approximation affine de f au voisinage de x .

La matrice de $Df(x)$ dans la base canonique est la *jacobienne* de f au point x , elle est notée $J_f(x)$ et

$$J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}.$$

Lorsque f est différentiable en tous points de U , on définit la différentielle de $f : Df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On dit que f est de classe C^1 si Df est continue. L'application Df est continue si et seulement si ses composantes sont continues c.-à-d. si pour tout (i, j) l'application $x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ est continue.

On définit par récurrence les dérivées d'ordre supérieur :

Une application f est k fois différentiable en x si sa différentielle d'ordre $k-1$ est différentiable en x . On note $D^k f(x)$ cette différentielle. On voit que $D^k f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \dots, (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))) \dots$ qui est isomorphe à l'espace des applications k -linéaires de $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (k fois) dans $\mathbb{R}^p$. La différentielle d'ordre k , notée $D^k f$ est donc l'application qui à x associe $D^k f(x)$. Les composantes de $D^k f(x)$ sont les dérivées partielles d'ordre k , c.-à-d. les $\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x)$.

Si $k=2$, l'application f est deux fois différentiable en x si elle est différentiable en tout points d'un voisinage de x et si l'application Df à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est différentiable en x .

Proposition 2.1.2 Soit $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Si f est k fois différentiable en x alors pour tout permutation σ , on a

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x) = \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_{\sigma(1)}} \dots \partial x_{j_{\sigma(k)}}}.$$

L'application f est de classe C^k si et seulement si pour tout $(j_1, \dots, j_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ l'application $x \mapsto \frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(x)$ est définie et continue sur U .

On dit que f est lisse (ou de classe C^∞) si elle est de classe C^k pour tout k . Exemple important : l'application $\text{GL}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$ définie par $M \mapsto M^{-1}$ est lisse (indication : utiliser que $\det(M)M^{-1}$ est égal à la transposée de la matrice des cofacteurs).

Définition 2.1.3 L'application $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ est un difféomorphisme si f est une bijection, f et f^{-1} sont partout différentiables.

En géométrie différentielle on voit deux objets permutés par un difféomorphismes comme étant « les mêmes. » On verra donc souvent un difféomorphisme comme un changement de coordonnées (on pensera aux coordonnées polaires, sphériques, cylindriques et autres).

Exercice 1 Soit $f : U \rightarrow V$ un difféomorphisme. Montrer que si f est lisse alors f^{-1} l'est aussi. [on commencera par montrer que $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$.]

Tout ce chapitre s'appuie sur le résultat suivant :

Théorème 2.1.4 Soient $f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, et $x \in U$. Si $Df(x)$ est inversible (c.-à-d. si $\det(J_f(x)) \neq 0$) alors il existe un ouvert V contenant x tel que la restriction de f à V est un difféomorphisme sur son image (c.-à-d. vu comme une application à valeurs dans $f(V)$).

Exercice 2 Le groupe linéaire n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit.

Rappelons que la série $(\sum_m \frac{M^m}{m!})_{m \in \mathbb{N}}$ converge normalement sur l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de n'importe quelle norme. Elle définit ainsi une fonction lisse appelée *exponentielle* et notée $\exp$.

1) Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent, alors

$$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B).$$

On pourra s'intéresser au système différentiel linéaire $y' = (A + B)y$.

2) Montrer que la fonction exponentielle est à valeurs dans l'ouvert $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

3) Prouver l'existence d'un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de la matrice nulle 0_n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de la matrice identité Id_n dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ tels que l'exponentielle réalise un difféomorphisme entre eux.

4) A partir de maintenant, quitte à restreindre $\mathcal{U}$, nous supposons $\mathcal{U}$ borné et posons $\mathcal{U}' = 1/2 \cdot \mathcal{U}$.

Montrer que pour toute matrice $P \in \mathcal{U}' \setminus \{0_N\}$ il existe un entier $k \geq 1$ tel que $kP \in \mathcal{U}'$ et $(k+1)P \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}'$

5) Soit $\mathcal{V}' = \exp(\mathcal{U}')$. Prouver que pour tout $M \in \mathcal{V}' \setminus \{\text{Id}_N\}$ il existe un entier $k \geq 1$ tel que $M^k \notin \mathcal{V}'$ (utilisez l'injectivité de l'exponentielle sur $\mathcal{U}$).

6) Conclure en exprimant en termes mathématiques le titre de l'exercice.

2.2 Nappes.

Après les courbes on voudrait étudier les surfaces ou des objets de dimension plus grande. On se propose, pour commencer, d'étudier les applications lisses de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $d < n$ sur le modèle de l'étude des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ effectuée au chapitre 1. Pour se limiter un champ d'étude raisonnable, on commence par se donner un analogue des arcs réguliers :

Définition 2.2.1 1) Une application différentiable dont la différentielle en tout point est injective est appelée une immersion.

2) On appelle nappe paramétrée de $\mathbb{R}^n$ de dimension d , tout couple (U, f) où U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$ et f est une immersion lisse de U dans $\mathbb{R}^n$. Le sous-ensemble $f(U)$ est appelé le support de la nappe.

3) On dit que deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) définissent la même nappe (géométrique) Σ (ou parfois sont équivalents) s'il existe un difféomorphisme lisse ψ de U dans V tel que $f = g \circ \psi$.

On dit alors que (U, f) et (V, g) sont des systèmes de coordonnées sur (ou des paramétrages de) Σ et que ψ est un changement de coordonnées (ou de paramétrage).

Les nappes de dimension 1 et les arcs réguliers sont les mêmes choses. Remarquons aussi que si $f : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application différentiable alors la condition « f est une immersion » s'écrit aussi

$$\forall x \in U, \ker(Df(x)) = \{0\} \\ \text{ou } \forall x \in U, \text{rang}(J_f(x)) = d.$$

Remarquons enfin, qu'on a alors $d \leq n$.

Exemples 2.2.2 — Si $f_0 : U \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une application lisse définie sur $U \subset \mathbb{R}^d$, alors le graphe de f_0 est une nappe géométrique de dimension d de $\mathbb{R}^{d+q}$. On vérifie que l'application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \simeq \mathbb{R}^{d+q}$ définie par $x \mapsto (x, f_0(x))$ est une immersion lisse. Cette application est clairement lisse et pour tout $x \in U$ et tout $h \in \mathbb{R}^d$,

$$Df(x)(h) = (h, Df_0(x).h).$$

— En prenant $U = \mathbf{D}_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f_0 définie par $f_0(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$. On définit f par $f(x) = (f_0(x), x)$. D'après ce qui précède $(\mathbf{D}_2, f)$ définit une nappe. Son support est l'intersection de la sphère unité (notée S^2) et du demi-espace $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 > 0\}$.

— Soit

$$g : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \longmapsto (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v),$$

et

$$\psi : \mathbf{D}_2 \longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ (x_1, x_2) \longmapsto \left(\arcsin\left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_2^2}}\right), \arcsin x_2 \right).$$

À nouveau pour voir que ψ est un difféomorphisme on exhibe la réciproque $\psi^{-1}(u, v) = (\cos v \sin u, \sin v)$.

On vérifie que $g \circ \psi(x_1, x_2) = (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2)$. Ce qui montre que $(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, g)$ est une nappe paramétrée équivalente à la nappe $(\mathbf{D}_2, f)$ donnée précédemment.

Chacune de ces applications définit des coordonnées sur la nappe qu'elles engendrent (on dira que p a pour coordonnées (x_1, x_2) dans les coordonnées définies par $(\mathbf{D}_2, f)$ si $p = f(x_1, x_2)$). Les coordonnées définies par $(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, g)$ sont bien connues : il s'agit de la latitude et de la longitude.

On se demande maintenant à quoi ressemblent (au moins localement) les supports des nappes. Est ce que le support d'une nappe de dimension 2 ressemble bien à une surface c'est-à-dire à un bout de plan ? La réponse est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.2.3 *Soient d et n deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application lisse, et $a \in U$. Si $Df(a)$ est injective, alors $d \leq n$ et il existe un ouvert $V \subset U$ contenant a , un ouvert W de $\mathbb{R}^n$, un difféomorphisme ϕ lisse de W sur son image tels que $f(V) \subset W$ et que pour tout $x \in V$ on a*

$$\phi(f(x_1, \dots, x_d)) = (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0).$$

Autrement dit si f est lisse et $Df(a)$ est injective, il existe un changement local de coordonnées « à l'arrivée » qui rend f linéaire au voisinage de a . Ainsi l'image d'un petit voisinage de a ressemble à un bout de p -plan, plus précisément : au voisinage de $f(a)$, il existe des coordonnées dans lesquelles l'image d'un petit voisinage de a se lit comme un bout de plan de dimension p . Remarquons au passage que cela donne un sens précis à l'expression « ressembler à un bout de plan ».

Preuve : L'application $Df(a)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$. Le théorème du rang nous dit que $d \leq n$.

La jacobienne de f au point a possède d lignes linéairement indépendantes, quitte à permuter les coordonnées de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^n$ (ce qui revient à composer à gauche par un premier difféomorphisme), on peut supposer que ce sont les d premières. Autrement dit on peut supposer

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} A \\ * \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d}}$$

avec A inversible (et carrée).

On définit alors g sur $U \times \mathbb{R}^{n-d}$ par

$$g(x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_{n-d}) = (f^1(x), \dots, f^d(x), y^1 + f^{d+1}(x), \dots, y_{n-d} + f^n(x)).$$

Cette fonction est lisse et sa jacobienne en $\bar{a} = (a_1, \dots, a_p, 0, \dots, 0)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale. Il existe donc un voisinage $\tilde{V}$ de $\bar{a}$ tel que la restriction de g à $\tilde{V}$ est un difféomorphisme lisse sur $W = g(\tilde{V})$. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que $V \times \{0\} \subset \tilde{V}$. On pose $\phi = (g|_{\tilde{V}})^{-1}$. Pour tout $x \in V$, $f(x) = g(x, 0) \in W$ et $(x, 0) \in \tilde{V}$ donc $\phi(f(x)) = (x, 0)$. $\square$

Exemples 2.2.4 Si la nappe est un graphe i.e. si elle admet un paramétrage (U, f) avec $f(x) = (x, f_0(x))$, on peut la redresser globalement. En effet (en gardant les notations de la preuve), on a $g(x, y) = (x, y + f(x))$. On voit que g est un difféomorphisme de $U \times \mathbb{R}^{n-d}$ dans lui-même dont l'inverse est $\phi(u, v) = (u, v - f(u))$.

Un tel redressement n'est pas unique. En composant par des difféomorphismes laissant fixe $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ on en construit d'autres. Ainsi l'application définie sur D_2 par $x \mapsto (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x)$ vue plus haut est aussi redressée par

$$\begin{aligned} \psi : \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 > 0\} &\rightarrow \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid e^{2z_1} - z_2^2 - z_3^2 > 0\} \\ (y_1, y_2, y_3) &\mapsto (\log \|y\|, y_2, y_3). \end{aligned}$$

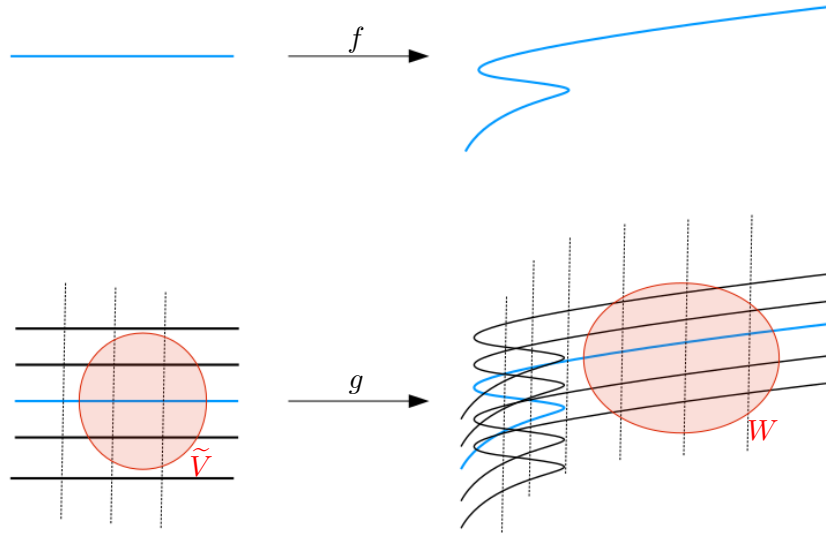


FIGURE 2.1 – La preuve de la proposition 2.2.3 en dessin. Il est clair que $g|_{\tilde{V}}^{-1} \circ f$ envoie le segment bleu du haut sur celui du bas.

Pour voir que ψ est un difféomorphisme, on montre que $\psi^{-1}(z_1, z_2, z_3) = (\sqrt{e^{2z_1} - z_2^2 - z_3^2}, z_2, z_3)$. On vérifie que $\psi \circ f(x) = (0, x_1, x_2)$.

Il existe une famille de nappes plus agréables que les autres :

Définition 2.2.5 Une nappe Σ est dite plongée s'il existe sur Σ un système de coordonnées (U, f) tel que f est injective et $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$ est continue¹ (autrement dit f est un homéomorphisme sur son image).

Remarquons que cette propriété ne dépend pas du paramétrage choisit.

Exemples 2.2.6 — Les graphes sont toujours des nappes plongées. En effet, si $f(x) = (x, f_0(x))$ alors f^{-1} peut être vu comme la restriction à $f(U)$ de l'application $(x, y) \mapsto x$. Elle est donc continue.

- Si on définit les coordonnées géographiques $(u, v) \mapsto (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$ sur tout $] -\pi, \pi[\times] -\pi/2, \pi/2[$, la nappe obtenue est aussi plongée.
- La proposition 2.2.3 dit aussi que tout $x \in U$ possède un voisinage V tel que $(V, f|_V)$ est une nappe plongée.
- La condition f injective n'est pas suffisante. Soit $(] -1, +\infty[, f)$ avec $f(t) = (\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3})$, le (demi)folium de Descartes (voir figure 2.2). L'application f est immersion injective (on a donc bien affaire à une nappe sans points doubles) mais $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = (0, 0) = f(0)$. Ainsi $\|f(t_n) - f(0)\| \rightarrow 0$ n'implique pas $t_n \rightarrow 0$; f^{-1} n'est donc pas continue et cette nappe n'est pas plongée.

La proposition suivante explique en quoi une nappe plongée est plus sympathique.

Proposition 2.2.7 Soient (U, f) et (V, g) deux nappes paramétrées ayant même support. Si (U, f) et (V, g) sont plongées², alors elles sont équivalentes.

1. Il est sous-entendu ici que $f(U)$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^n$.

2. On pourrait se contenter de supposer (V, g) plongée et f seulement injective et affiner la preuve

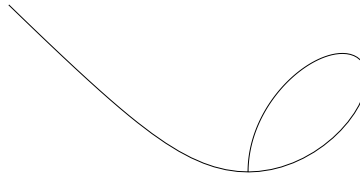


FIGURE 2.2 – Le folium de Descartes

Preuve. Comme (V, g) est plongée l'application $g^{-1} \circ f$ qui va de U dans V est bien définie et continue. L'application f étant injective cette application est de plus une bijection. Il s'agit de montrer qu'il s'agit d'un difféomorphisme lisse.

Soient $x_0 \in U$ et $y_0 = g^{-1} \circ f(x_0)$. D'après la proposition 2.2.3, il existe V_0 un ouvert de V contenant y_0 , W un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme ϕ de W sur son image tels que $g(V_0) \subset W$ et pour tout $y \in V_0$, on a $\phi(g(y)) = (y, 0)$.

Soit $U_0 = (g^{-1} \circ f)^{-1}(V_0)$. Comme $g^{-1} \circ f$ est continue, cet ensemble est un voisinage ouvert de x_0 . Comme $f(U_0) \subset W$, l'application $\phi \circ f|_{U_0}$ est bien définie et lisse. De plus, pour tout $x \in U_0$, $\phi \circ f(x) = (g^{-1} \circ f(x), 0)$. En composant par la projection sur le premier terme (qui est lisse), on en déduit que $g^{-1} \circ f$ est lisse en x_0 .

On a montré que $g^{-1} \circ f$ est lisse. Par symétrie, il en est de même pour $f^{-1} \circ g$, ce qui termine la preuve. $\square$

Cette proposition dit qu'*être une nappe plongée est une propriété du support de la nappe*, ce qui est bien plus pratique.

2.3 Des nappes aux sous-variétés.

Il se trouve que la notion de nappe est trop limitée. Par exemple, on n'arrive pas à voir *toute* la sphère comme (le support de) une nappe. Et on ne voudrait pas exclure la sphère de notre domaine d'étude. . . Mais la sphère a une propriété agréable : tout point sur la sphère a un voisinage qui est le support d'une nappe. On va s'intéresser aux objets qui partagent cette propriété.

Définition 2.3.1 On dit qu'un sous-ensemble M de $\mathbb{R}^n$ est une sous-variété de dimension d (ou de codimension $n - d$) de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p et une nappe plongée (U, f) de dimension d telle que $f(U) = M \cap \Omega$.

Les nappes (U, f) sont alors appelées des systèmes de coordonnées locales de M .

Notre remarque ci-dessus peut donc se réécrire en : la sphère S^2 est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

On voudrait tester cette nouvelle définition sur différents sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ (disons pour $n = 2$ ou 3) pour se faire une meilleure idée de ce qui est et de ce qui n'est pas une sous-variété. Bien souvent un tel sous-ensemble est donné par une équation (toute comme $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$) et il n'est pas toujours possible de trouver explicitement un paramétrage local d'un ensemble donné par une équation. Pour contourner cette difficulté, on cherche ce qu'est une « bonne équation ».

Définition 2.3.2 Une application différentiable f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$ dont la différentielle en tout point est surjective est appelé une *submersion*. Autrement dit f est une submersion si

$$\forall x \in U, \operatorname{rg}(Df(x)) = q,$$

où $\operatorname{rg}(Df(x))$ désigne le rang de $Df(x)$.

La proposition 2.2.3 a effectivement un analogue :

Proposition 2.3.3 Soient n et q deux entiers non nuls, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^q$ une application lisse, et $a \in U$. Si $Df(a)$ est surjective, alors $n \geq q$ et il existe un ouvert W contenant a et un difféomorphisme lisse ϕ de W sur son image tels que $\phi(W) \subset U$ et que pour tout $x \in W$ on a

$$f(\phi(x_1, \dots, x_n)) = (x_1, \dots, x_q).$$

Preuve : L'application $Df(a)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$. Le théorème du rang nous dit que $q \leq n$.

Par hypothèse, la jacobienne de f au point a est de rang q . Permuter les coordonnées de $\mathbb{R}^n$ (au départ donc), revient à permuter les colonnes de $J_f(a)$. On peut supposer que les q premières colonnes engendrent $\mathbb{R}^q$. La matrice B définie par

$$B = \left(\frac{\partial f^i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq q}}$$

est alors inversible (et on a $J_f(a) = (B \quad *)$).

On définit alors $g : U \rightarrow \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{n-q}$ par $g(x) = (f^1(x), \dots, f^q(x), x_{q+1}, \dots, x_n)$. Cette fonction est lisse et sa jacobienne en a est de la forme

$$\begin{pmatrix} B & * \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

elle est donc inversible. On peut donc appliquer le théorème d'inversion locale. Il existe ainsi un voisinage V de a tel que la restriction de g à V est un difféomorphisme lisse sur $W = g(V)$. On pose $\phi = (g|_V)^{-1}$. Pour tout $x \in W$, $f \circ \phi(x) = (x_1, \dots, x_q)$.

Remarquons pour plus tard que, vu l'expression de g , il existe une application lisse $F : W \rightarrow \mathbb{R}^q$ telle que $\phi(u, v) = (F(u, v), v)$, pour tout $(u, v) \in W$. $\square$

Autrement dit si $Df(a)$ est surjective, il existe un changement local de coordonnées « au départ » qui rend f linéaire. En particulier, si $Df(a)$ est surjective et $f(a) = 0$, alors il existe un voisinage U de a tel que $f^{-1}(0) \cap U$ ressemble à un bout de $(n - q)$ -plan... On devine ainsi qu'il existe différentes définitions équivalentes de ce qu'est une sous-variété.

Théorème 2.3.4 Soit M un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) M est une sous-variété de dimension d de $\mathbb{R}^n$ (voir définition 2.3.1)
- 2) pour tout $p \in M$ il existe Ω et Ω' voisinages ouverts de p et de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme lisse ϕ tel que $\phi(\Omega \cap M) = \Omega' \cap (\mathbb{R}^d \times \{0\})$.
- 3) pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ contenant p et une submersion lisse $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$.
- 4) Quitte à permuter les coordonnées de $\mathbb{R}^n$, pour tout $p \in M$ il existe un ouvert Ω contenant p , une application lisse f_0 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{n-d}$ tels que $\Omega \cap M$ est le graphe de f_0 c'est-à-dire que $\Omega \cap M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \mid x \in U \text{ et } y = f_0(x)\}$.

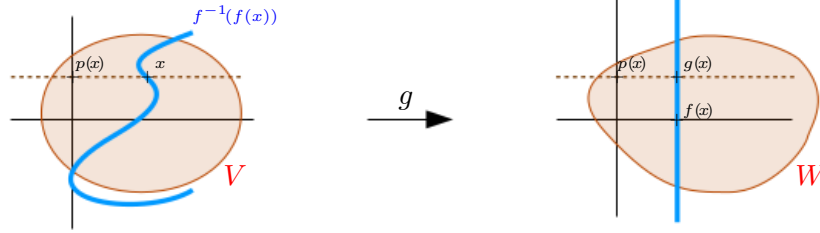


FIGURE 2.3 – La preuve de la proposition 2.3.3 en dessin. On a écrit $f(x)$ pour $(f(x), 0)$ pour des raisons de place. En suivant $y = g(x) \in W$, on voit que $f \circ g|_V^{-1}$ est la première projection. On voit aussi que $g|_V^{-1}$ exprime la courbe bleue comme un graphe au dessus du segment bleu, cf théorème 2.3.4.

Preuve :

1) $\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 2.2.3.

3) $\Rightarrow$ 2) d'après la proposition 2.3.3.

4) $\Rightarrow$ 1) déjà vu cf. exemple 2.2.6.

3) $\Rightarrow$ 4), c'est exactement le théorème des fonctions implicites !

Soit h la submersion définie au voisinage de p telle que $\Omega \cap M = h^{-1}(0)$, donnée par 3) et soit $\phi : W \rightarrow V \ni p$ un difféomorphisme qui redresse h au voisinage de p donné par la proposition 2.3.3. Soit U la projection sur $\mathbb{R}^d$ de $\{0\} \times \mathbb{R}^d \cap V$. Clairement $h(x) = 0$ si et seulement s'il existe $v \in U$ tel que $x = \phi(0, v)$. On a vu que, quitte à permuter les coordonnées, il existe $F : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ lisse telle que $\phi(u, v) = (F(u, v), v)$. Par conséquent $h^{-1}(0) \cap V = M \cap V$ est le graphe de l'application lisse $f_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ définie par $f_0(v) = F(0, v)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Soit $p \in M$ et ϕ tel que défini en 2). Soit i l'application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $x \mapsto (x, 0)$. Il existe un ouvert U tel que $(U, \phi^{-1} \circ i)$ est bien définie et $p \in \phi^{-1} \circ i(U)$. L'application $\phi^{-1} \circ i$ est une immersion et $\phi^{-1} \circ i(U) \subset M$.

2) $\Rightarrow$ 3) Soit $p \in M$ et ϕ tel que défini en 2). Soit π la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ dans $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-d}$. L'application $h = \pi \circ \phi$ est une submersion définie sur Ω telle que $h^{-1}(0) = \Omega \cap M$. $\square$

On a utilisé la propriété suivante qui mérite d'être remarquée mais dont la preuve est laissée en exercice :

Propriété 2.3.5 *La composée de deux immersions (resp. de deux submersions) est une immersion (resp. une submersion).*

Exercice 3 Montrer directement (sans utiliser le théorème 2.3.4) que si M est le graphe d'une application lisse de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$ alors il existe une submersion lisse h de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-p}$ telle que $M = h^{-1}(0)$.

Exercice 4 Montrer sans utiliser les propositions 2.2.3 et 2.3.3 que si f est lisse (de classe C^1 suffit) alors la propriété « $Df(x)$ est surjective (resp. injective) en x » est ouverte, c'est-à-dire si elle est vraie en x elle est vraie sur un voisinage de x .

Parmi ces critères certains sont plus pratiques pour montrer qu'un sous-ensemble M est une sous-variété (comme le troisième) et d'autres pour montrer que M n'est pas une sous-variété (comme le quatrième). Illustrons cela avec des exemples.

Exemples 2.3.6 – Considérons H l’hyperboloïde à une nappe, c’est à dire $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\}$. On considère la fonction lisse $h : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1$. Pour tout $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on a $Dh(x) \cdot \xi = 2x_1 \cdot \xi_1 + 2x_2 \xi_2 - 2x_3 \xi_3$. Cette application linéaire qui va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ est surjective car $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$. L’application h est donc une submersion lisse. Ce qui entraîne que H est donc une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

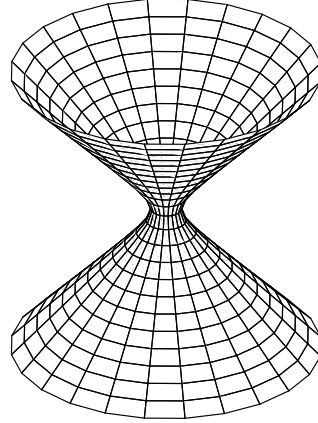


FIGURE 2.4 – Hyperboloïde à une nappe

– Soit $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^3 = 0\}$, la cubique cuspidale. Si C était une sous variété, alors, au voisinage de 0, on pourrait voir C comme le graphe d’une fonction lisse. Il existerait donc deux réels positifs ε et η et une fonction $f_0 :]-\eta, \eta[\rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_1 = f_0(x_2) \quad \text{ou} \quad \|x\| < \varepsilon \text{ et } x \in C \Leftrightarrow x_2 = f_0(x_1).$$

Dans le deuxième cas, on aurait $f_0(x_1) = (x_1^2)^{1/3}$ mais cette application n’est pas dérivable en 0. Dans le premier C contiendrait un point d’ordonnée strictement négative, ce qui n’est pas le cas. C n’est donc pas une sous-variété de $\mathbb{R}^2$, par contre $C \setminus \{0\}$ en est une.

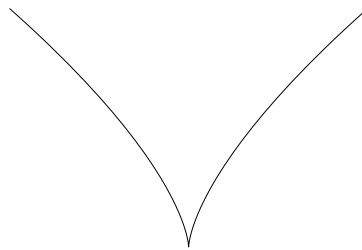


FIGURE 2.5 – Cubique cuspidale

– Le fait que l’application $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 - x_2^3$ n’est pas une surjection ne montre pas que C n’est pas une sous-variété (mais c’est tout de même un indice). Ainsi, on peut écrire $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0\}$, l’application $(x, y) \mapsto (x^2 + y^2 - 1)^2$ a une différentielle nulle le long de S^1 , mais le cercle S^1 est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite M désignera une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d et p un point de M .

2.4 Espace tangent, extrema liés.

Définition 2.4.1 Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ appartient à $T_p M$, l'espace tangent en p à M , si et seulement s'il existe un arc (I, γ) tel que $\gamma(I) \subset M$ (on dit que γ est tracé sur M), que $\gamma(0) = p$ et que $\gamma'(0) = v$.

Vu comme ça, il n'est pas clair du tout que cet espace soit plan. La proposition suivante, en plus de donner un moyen de calculer cet espace, éclairci ce point.

Proposition 2.4.2 1) Si (U, f) est un système de coordonnées locales sur M tel que $f(0) = p$, alors

$$T_p M = Df(0) \cdot \mathbb{R}^d.$$

En particulier, si M est le graphe de f_0 alors $T_{(x, f_0(x))} M$ est le graphe de $Df_0(x)$.

2) Si h est une submersion telle que $M \cap \Omega = h^{-1}(0)$, alors

$$T_p M = \ker Dh(p)$$

Preuve : 1) Pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, on sait que $Df(0) \cdot v = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(tv)$. Mais $t \mapsto f(tv)$ est un arc tracé sur M et donc $Df(0) \cdot v \in T_p M$.

Réciproquement, soit (I, γ) un arc paramétré de $\mathbb{R}^n$ dont l'image est incluse dans $f(U)$ et tel que $\gamma(0) = p$. D'après la proposition 2.2.3, il existe un difféomorphisme ϕ défini sur un voisinage de p tel que pour tout x proche de 0 $\phi \circ f(x) = (x, 0)$. Comme f^{-1} est continu, pour t proche de 0, $f^{-1}(\gamma(t))$ est proche de 0 et donc

$$((f^{-1} \circ \gamma)(t), 0) = (\phi \circ f)(f^{-1} \circ \gamma(t)) = (\phi \circ \gamma)(t).$$

Ce qui montre que $f^{-1} \circ \gamma$ est lisse. On a donc

$$\gamma'(0) = (f \circ (f^{-1} \circ \gamma))'(0) = Df(0) \cdot (f^{-1} \circ \gamma)'(0).$$

Ce qui donne l'inclusion réciproque.

2) Les espaces $Df(0) \cdot \mathbb{R}^d$ et $\ker Dh(p)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de même dimension. Il suffit donc de montrer une inclusion pour avoir égalité. Soit (I, γ) un arc tracé sur M dont l'image est incluse dans le domaine de définition de h et tel que $\gamma(0) = p$. Pour tout $t \in I$, on a $h(\gamma(t)) = 0$ et donc $Dh(p) \cdot \gamma'(0) = 0$ càd $\gamma'(0) \in \ker Dh(p)$. $\square$

Exemples 2.4.3 – On montre facilement à partir de la proposition 2.4.2 que pour tout $p \in S^n$, $T_p S^n = p^\perp$.

– Soit C le cône défini par $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$. Quand on voit C (par exemple sur la figure 2.6) on se dit qu'il y a sûrement un problème en O qui l'empêche d'être une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Comment le prouver ? La proposition 2.4.2 nous permet le raisonnement par l'absurde suivant :

Supposons que C soit une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Les chemins $t \mapsto t(1, 0, 1)$, $t \mapsto t(0, 1, 1)$ et $t \mapsto t(1, 1, \sqrt{2})$ étant tracés sur C , les vecteurs $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, \sqrt{2})$ seraient des éléments de $T_0 C$. Mais ces vecteurs étant linéairement indépendants, $T_0 C$ et donc C seraient de dimension 3 et donc C serait un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Ce qui est faux donc C n'est pas une sous-variété.

L'espace tangent tel qu'on l'a défini est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension d : il ne passe pas par p . Le tangent « appuyé » sur M est le suivant.

Définition 2.4.4 On définit $T_p^A M$ le plan affine tangent en p à M comme étant le plan affine de direction $T_p M$ passant par p .

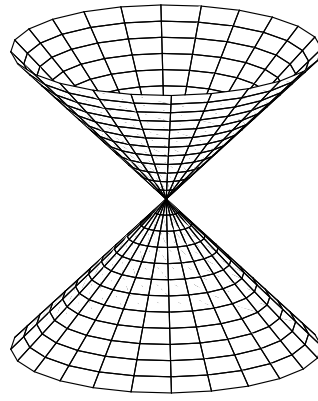
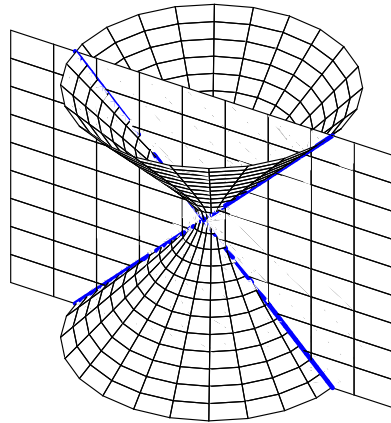


FIGURE 2.6 – Le cône

FIGURE 2.7 – L'hyperboloïde à une nappe et son tangent affine en $(1, 0, 0)$

Exercice 5 Soit l'hyperboloïde $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 1 = 0\}$. Pour tout $p \in H$, déterminer $T_p H$ puis $T_p^A H$. Déterminer $T_p^A H \cap H$.

Il est possible de faire du calcul différentiel sur les sous-variétés. Cela dépasse hélas le cadre de ce cours. Nous nous contenterons de la partie émergée de l'iceberg : le théorème des extrema liés. Il dit simplement qu'une fonction dérivable à valeur dans $\mathbb{R}$ à sa différentielle qui s'annule en un extremum. Son originalité réside dans le fait que l'ensemble de départ est une sous-variété.

Théorème 2.4.5 (extrema liés) Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d , F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage de M . Si $p \in M$ est tel que $F(p)$ est un extremum local de $F|_M$, alors $DF(p)|_{T_p M} = 0$. En particulier si $h = (h^1, \dots, h^{n-d})$ est une submersion telle que $h^{-1}(0) = M$ alors

$$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-d}, \lambda_1 Dh^1(p) + \dots + \lambda_{n-d} Dh^{n-d}(p) = DF(p).$$

Les réels λ_i sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.

Preuve : Soit $p \in M$ tel que $F(p)$ soit un extremum local de la restriction de F à M . Soit $v \in T_p M$ et (I, γ) un arc tracé sur M tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = v$. La fonction $F \circ \gamma$ a un extremum local en 0 donc $(F \circ \gamma)'(0) = 0$. Or $(F \circ \gamma)'(0) = DF(p).v$, on en déduit que la restriction de $DF(p)$ à $T_p M$ est nulle, autrement dit que $T_p M \subset \ker DF(p)$.

Soit L l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^{n-d+1}$ définie par $L(v) = (DF(p).v, Dh(p).v)$. Le noyau de L contient $T_p M$ sa dimension est donc au moins d et son rang au plus $n - d$. Son rang est au moins égal à celui de $Dh(p)$ c'est-à-dire $n - d$. La famille de formes linéaires $\{Dh^1(p), \dots, Dh^{n-d}(p), DF(p)\}$ (les vecteurs lignes de la matrice de L) est donc liée. Il existe donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-d}) \in \mathbb{R}^{n-d+1}$ tels que $\lambda_0 DF(p) + \sum_i \lambda_i Dh^i(p) = 0$. Comme la famille $\{Dh^i(p), 1 \leq i \leq n - d\}$ est libre, on a forcément $\lambda_0 \neq 0$, on peut donc supposer que $\lambda_0 = -1$. $\square$

Pour rendre cet énoncé plus familier, on pose la définition suivante :

Définition 2.4.6 Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension d , F une fonction différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un voisinage de M . Un point $p \in M$ tel que $DF(p)|_{T_p M} = 0$ est appelé un point critique de $F|_M$.

Ainsi, le théorème 2.4.5 dit que, comme toujours, les extrema locaux de $F|_M$ se trouvent en les points critiques de $F|_M$.

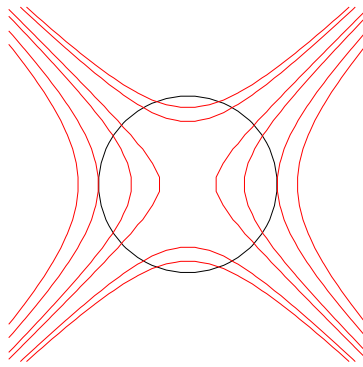


FIGURE 2.8 – la sous-variété S^1 et quelques niveaux de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$

Lorsque F est une submersion, on peut donner une interprétation géométrique. Dans ce cas, les niveaux de F sont des sous-variétés et les points critiques de $F|_M$ sont les points p où $T_p M \subset T_p(F^{-1}(F(p)))$ (voir figure 2.8).

Le théorème des extrema liés a quelques classiques et jolies applications, comme celles qui suivent où celle sur le jeu de billard dans une ellipse que l'on trouvera dans le *Petit guide du calcul différentiel* de Rouvière.

Exercice 6 Soit M une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$ de codimension 1 (on dit une hypersurface). Montrer à l'aide du théorème 2.4.5 que l'application allant de M dans l'ensemble des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ et qui à un point de M associe l'espace tangent à M en ce point est surjective.

Exercice 7 Soit L une matrice symétrique d'ordre n et F la forme quadratique qui lui est associée, i.e. $F(x) = {}^t x L x$. Dédurre de l'étude de $F|_{S^{n-1}}$ que L admet un vecteur propre v . Montrer que $L(v^\perp) = v^\perp$ et en déduire que L est diagonalisable.

Chapitre 3

Étude métrique des surfaces de $\mathbb{R}^3$

On s'intéresse maintenant à la géométrie des surfaces (i.e. des sous-variétés de dimension 2) de l'espace $\mathbb{R}^3$. Comme on travaillera surtout localement, on supposera presque toujours qu'il existe un système de coordonnées global autrement dit que la surface est une nappe plongée.

3.1 Première forme fondamentale d'une surface.

Dans tout ce qui suit Σ désigne une surface de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.1.1. On appelle première forme fondamentale de Σ en p , on note I_p , la restriction du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ à $T_p\Sigma$. Autrement dit si $(X, Y) \in T_p\Sigma$, par définition

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

On a ainsi un produit scalaire sur chaque $T_p\Sigma$ ou si on veut un « champ » de produits scalaires.

Si X est donné, il est facile de calculer $I_p(X, X)$. Mais pour exprimer plus globalement I_p , on a besoin d'une base de $T_p\Sigma$. Il n'y en a pas de canonique. Cependant, si on choisit des coordonnées (U, f) , pour tout $x \in U$ les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$ forment une base de $T_{f(x)}\Sigma$. On note $\alpha_f(x)$ la matrice de $I_p(f(x))$ dans cette base. On a

$$\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\rangle & \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle \end{pmatrix} = {}^t(Jf(x))(Jf(x)) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

où $Jf(x)$ désigne la jacobienne de f en x et t la transposition.

On a donc $I_f(x)(Df(x).(\xi_1, \xi_2), Df(x)(\zeta_1, \zeta_2)) = I_{f(x)}(\xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}) = {}^t\xi \alpha_f(x) \zeta$, où $\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}$ et $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$.

Définition 3.1.2. L'application lisse de U dans l'espace des matrices carrées symétriques d'ordre 2 ainsi définie est appelée l'expression de la première forme fondamentale dans les coordonnées (U, f) .

Cette application dépend fortement du système de coordonnées choisi, mais on sait dire ce qu'elle devient quand on change de coordonnées. Il suffit d'appliquer en chaque point la formule de changement de base des formes bilinéaire.

Proposition 3.1.3. Si (U, f) et (V, g) sont deux systèmes de coordonnées sur Σ et si ψ est un changement de coordonnées tel que $g = f \circ \psi$, alors

$$\alpha_g(x) = {}^t(J\psi(x))\alpha_f(\psi(x))(J\psi(x)),$$

où $J\psi$ désigne la jacobienne de ψ .

Preuve : Par définition on a $\alpha_g(x) = {}^t(Jg(x))(Jg(x))$. La formule de composition des dérivations nous dit que $Jg(x) = Jf(\psi(x))J\psi(x)$, d'où

$$\begin{aligned}\alpha_g(x) &= {}^t(Jf(\psi(x))J\psi(x))(Jf(\psi(x))J\psi(x)) \\ &= {}^t(J\psi(x)){}^t(Jf(\psi(x))(Jf(\psi(x)))(J\psi(x))) \\ &= {}^t(J\psi(x))\alpha_f(J\psi(x)).\end{aligned}\quad \square$$

Exemples 3.1.4. 1) On considère la nappe paramétrée (U, f) où $U = \mathbf{D}_2$ et $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{1-x_1^2-x_2^2})$. On a

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} & -\frac{x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}} \end{pmatrix}.$$

Comme $\alpha_f = {}^tJf(x)Jf(x)$, on a

$$\alpha_f = \begin{pmatrix} 1 + \frac{x_1^2}{1-x_1^2-x_2^2} & \frac{x_1x_2}{1-x_1^2-x_2^2} \\ \frac{x_1x_2}{1-x_1^2-x_2^2} & 1 + \frac{x_2^2}{1-x_1^2-x_2^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{1-x_1^2-x_2^2} \begin{pmatrix} 1-x_2^2 & x_1x_2 \\ x_1x_2 & 1-x_1^2 \end{pmatrix}.$$

2) On prend maintenant la nappe paramétrée (V, g) où $V =]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $g(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$ (les deux nappes ne sont pas équivalentes, car $f(U) \neq g(V)$, mais on peut les rendre équivalentes en restreignant U et V). Cette fois

$$Jg(u, v) = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ 0 & \cos v \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \alpha_g = \begin{pmatrix} \cos^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons que Σ soit une nappe plongée paramétrée par (U, f) . L'expression α_f contient suffisamment d'information sur la géométrie de Σ pour qu'on puisse (parfois) travailler uniquement sur $U \subset \mathbb{R}^2$ sans repasser par $\mathbb{R}^3$. Par exemple, si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \gamma$ est un arc C^1 . Sa longueur est donnée par

$$L(\gamma) = \int_0^1 \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} dt.$$

On a vu au chapitre précédent qu'il existe $\beta : [0, 1] \rightarrow U$ de classe C^1 tel que $\gamma = f \circ \beta$. On a $\gamma'(t) = Df(\beta(t))\beta'(t)$ et donc

$$\begin{aligned}L(\gamma) &= \int_0^1 \langle Df(\beta(t))\beta'(t), Df(\beta(t))\beta'(t) \rangle^{1/2} dt \\ &= \int_0^1 ({}^t\beta'(t) \cdot \alpha_f(\beta(t)) \cdot \beta'(t))^{1/2} dt\end{aligned}$$

Cela signifie que pour déduire la longueur d'une route (γ) de son tracé sur une carte (β), il faut connaître la première forme fondamentale associée. En général, le plus court chemin ne se lit pas comme une ligne droite sur la carte, cf. exemple 3.1.5.

Même chose pour les angles. L'angle (ou du moins sa mesure) entre deux vecteurs non nuls X et Y de $\mathbb{R}^3$ est $\arccos \left\langle \frac{1}{\|X\|}X, \frac{1}{\|Y\|}Y \right\rangle$. Si ces deux vecteurs appartiennent à $T_p\Sigma$, il existe V et W non nuls dans $\mathbb{R}^2$ tels $Df(x).V = X$ et $Df(x).W = Y$. Ainsi, l'angle entre X et Y est égal à

$$\arccos \left(\frac{{}^tV}{({}^tV\alpha_f(p)V)^{1/2}}\alpha_f(p)\frac{W}{({}^tW\alpha_f(p)W)^{1/2}} \right).$$

Exemple 3.1.5. Imaginons le Loup et le Petit Chaperon Rouge allant de Minneapolis à Ulan Bator. Admettons que ces villes sont situées sur le 45ème parallèle et qu'il y a une différence de longitude de 180 degré. On donne au loup une carte réalisée avec les coordonnées (V, g) et à la fillette une réalisée à partir de (V, g) vue à l'exemple 3.1.4. Chacun veut arriver le premier. Chacun part donc en ligne droite... sur sa carte.

Dans les coordonnées (V, g) les villes ont pour coordonnées $(0, \pi/4)$ et $(\pi, \pi/4)$, le loup va donc suivre le 45ème parallèle ie le chemin dont l'expression en coordonnées (V, g) est $t \mapsto (t, \pi/4)$. Il parcourt donc une longueur égale à $\int_0^\pi \cos(\pi/4)dt = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$ (l'unité étant le rayon terrestre).

Dans les coordonnées (U, f) par contre les coordonnées de ces villes sont $(0, -\sqrt{2}/2)$ et $(0, \sqrt{2}/2)$. Le chemin qui semble naturel a pour expression dans les coordonnées (U, f) $t \mapsto (0, t)$ (il passe par le pôle nord). Sa longueur est donnée par $\int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{2}$. C'est beaucoup plus court !

Remarque 3.1.6. On voit que deux nappes paramétrées (U, f) et (V, g) telles que $\alpha_f = \alpha_g$ paraissent identiques à leurs habitants tant qu'ils n'ont pas conscience de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui les entoure et ce même si $f(U)$ et $f(V)$ n'ont rien à voir. Tout ce qu'ils peuvent mesurer localement sans quitter la surface sera identique. C'est un peu comme si on avait deux cartes géographiques identiques correspondant à deux parties distinctes du globe.

Cas particulier important si ϕ est une isométrie $\alpha_f = \alpha_{\phi \circ f}$. Dans ce cas, les nappes sont en un certain sens les mêmes. Par contre, on trouve facilement (exercice) un paramétrage local (U, f) du cylindre droit tel que $\alpha_f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les habitants du cylindre (qui ne se déplacent pas trop) ont donc l'impression de vivre dans un plan.

Si on se donne des coordonnées (U, f) . Les longueurs que l'on « voit » sur U sont les vraies longueurs (ie celles sur Σ) à un facteur près si et seulement s'il existe $C > 0$ (l'inverse de l'échelle) telle que $\alpha_f = C^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sur toutes les mappemondes les longueurs lues sont fausses.

Pour ce qui est des angles, on montre facilement que deux produits scalaires définissent les mêmes angles (par la formule vue plus haut) si et seulement s'ils sont proportionnels. On en déduit que que les angles lus (par exemple avec un rapporteur) sur une carte sont les angles réels s'il existe une fonction ℓ à valeurs positives telle que $\alpha_f(p) = \ell(p) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sur beaucoup de mappemondes cette condition est vérifiée (pour des raisons esthétiques et pratiques).

Exercice 1. Projections de Mercator. Soit (V, g) les coordonnées (géographiques) vue dans l'exemple 3.1.4. Montrer qu'il existe un changement de coordonnées ψ de la forme $(x, y) \mapsto (x, h(y))$ tel que $\alpha_{g \circ \psi}(x) = \ell(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où ℓ est une fonction positive.

3.2 Application de Gauss.

On dit que les Grecs avaient déduit le fait que la terre est ronde de l'observation des mâts des bateaux arrivant à l'horizon. Nous voulons faire la même chose. On commence par équiper Σ de

mâts.

Définition 3.2.1. Une application $\nu : \Sigma \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une application de Gauss de Σ si ν est continue et si pour tout $p \in \Sigma$, $\nu(p)$ est perpendiculaire à $T_p\Sigma$.

On voit par exemple que l'identité est une application de Gauss de la sphère S^2 .

Remarquons que si ν est une application de Gauss alors $-\nu$ aussi. Un plan n'ayant que deux vecteurs orthogonaux de norme 1, on voit en faisant leur produit scalaire que lorsque Σ est connexe (si c'est une nappe par exemple) il existe au plus deux applications de Gauss. Il n'en existe pas toujours, on se convainc facilement du fait qu'un ruban de Möbius ne possède d'application de Gauss. Si Σ est une nappe, il n'y a pas de problèmes. En effet si (U, f) est un paramétrage de Σ alors l'application $\nu = N_f \circ f^{-1}$ où N_f est définie par

$$N_f(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|}$$

est une application de Gauss. On l'appelle l'application de Gauss associée à (U, f) . On remarque que l'application N_f est lisse (du moins si f l'est).

Proposition 3.2.2. Soient (U, f) et (V, g) deux paramétrages de Σ et $\phi : U \rightarrow V$ le changement de coordonnées associé. Ces deux paramétrages définissent la même application de Gauss sur Σ si et seulement si $\det(J\phi) > 0$ sur U .

On dit alors qu'ils définissent la même orientation sur Σ .

Preuve : Posons $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\phi^{-1}(x)) = (a, b)$ et $\frac{\partial \phi}{\partial x_2}(\phi^{-1}(x)) = (c, d)$. On a

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_1}(\phi^{-1}(x)) \wedge \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_2}(\phi^{-1}(x)) = (a \frac{\partial f}{\partial x_1} + b \frac{\partial f}{\partial x_2}) \wedge (c \frac{\partial f}{\partial x_1} + d \frac{\partial f}{\partial x_2})(x).$$

Le produit vectoriel étant bilinéaire alterné, on a donc

$$\frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_1}(\phi^{-1}(x)) \wedge \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x_2}(\phi^{-1}(x)) = (ad - bc) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \det(J\phi(\phi^{-1}(x))) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x). \square$$

Dorénavant nous orientons Σ c'est-à-dire nous n'autorisons que les changements de coordonnées dont le jacobien est positif. D'après la proposition 3.2.2, tous les paramétrages d'une nappe orientée définissent la même application de Gauss. On l'appelle donc l'application de Gauss de la nappe orientée.

Exercice 2. Déterminer l'application de Gauss de la nappe paramétrée par $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$.

Exercice 3. Soient Σ une nappe orientée paramétrée par (U, f) et Ψ une isométrie de $\mathbb{R}^3$ de partie linéaire $d\Psi$. On note $\Psi(\Sigma)$ la nappe orientée paramétrée par $(U, \Psi \circ f)$. Montrer que $\nu_{\Psi(\Sigma)}(\Psi \circ f(x)) = \eta d\Psi(\nu_{\Sigma}(f(x)))$, où η est le signe du déterminant de $d\Psi$.

3.3 Aire d'une surface.

On cherche à munir Σ d'une mesure correspondant à notre idée intuitive d'aire (qui n'est pas si évidente à expliciter). Notamment, lorsque l'on déplace une surface son aire ne devrait pas changer. Autrement dit, si Ψ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, on veut que Σ et $\Psi(\Sigma)$ aient même mesure. On commence par remarquer qu'une surface est toujours de mesure nulle, il ne peut s'agir d'une

simple restriction de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^3$. On suppose que Σ est une nappe plongée paramétrée par (U, f) . Toute mesure sur Σ se rappatrie via f en une mesure sur U . Inversement toute mesure sur U définit une mesure sur Σ , mais en général cette mesure dépend du choix de (U, f) .

Proposition 3.3.1. *Soient (U, f) et (V, g) deux paramétrages d'une nappe plongée Σ . Soient α_f et α_g les expressions dans ces coordonnées de la première forme fondamentale. Soit μ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$. Les mesures $\sqrt{\det(\alpha_f)}\mu$ et $\sqrt{\det(\alpha_g)}\mu$ définissent la même mesure sur Σ .*

Preuve : On note Λ_f (resp. Λ_g) la mesure sur Σ définie par $\sqrt{\det(\alpha_f)}\mu$ (resp. $\sqrt{\det(\alpha_g)}\mu$). Soit $\phi : U \rightarrow V$ le difféomorphisme tel que $f = g \circ \phi$. D'après la proposition 3.1.3, $\alpha_f = {}^t J\phi \alpha_g J\phi$, donc $\det(\alpha_f) = (\det(J\phi))^2 \det(\alpha_g)$. Soit D une partie mesurable de Σ .

$$\Lambda_f(D) := \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_f)} d\mu = \int_{\phi^{-1}(g^{-1}(D))} |\det(J\phi)| \sqrt{\det(\alpha_g)} d\mu.$$

La formule de changement de variable, nous dit par ailleurs que

$$\int_{\phi^{-1}(g^{-1}(D))} |\det(J\phi)| \sqrt{\det(\alpha_g)} d\mu = \int_{g^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_g)} d\mu := \Lambda_g(D). \quad \square$$

On a donc défini une mesure sur Σ indépendamment d'un choix de coordonnées.

Définition 3.3.2. *Pour toute partie mesurable D de Σ , on définit l'aire de D comme étant $\int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det(\alpha_f)} d\mu$.*

On voit aussi que l'aire ainsi définie est invariante par isométrie. En effet, si Ψ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$, alors $\alpha_{\Psi \circ f} = \alpha_f$.

Proposition 3.3.3. *Si Ψ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ et D une partie mesurable de Σ alors l'aire de D (vu comme partie de Σ) est égale à l'aire de $\Psi(D)$ (vu comme partie de $\Psi(\Sigma)$).*

On veut comparer maintenant notre aire à l'aire usuelle. On commence par épaissir D grâce à une application de Gauss. Pour tout $t > 0$ on pose

$$V(t) := \{p + s\nu(p), p \in D \subset \Sigma, s \in [0, t]\}.$$

On remarque que cette façon d'épaissir est invariante par déplacement de la surface. Si Σ est compacte et $D = \Sigma$ (il ne s'agit plus d'une nappe), on montre¹ que $V(t)$ est l'ensemble des points à distance t de Σ situé d'un côté de Σ .

Si D et t sont petits, $V(t)$ ressemble à un cylindre de base D et de hauteur t . On devrait donc avoir $\text{vol}(V(t)) \simeq \text{aire}(D) \times t$. On peut voir cette affirmation comment une formulation du fait qu'on peut approximer l'aire d'une surface par la quantité de peinture nécessaire pour la peindre.

Exemples 3.3.4. Si D est le parallélogramme de sommets $0, X, Y, X + Y$ (contenu dans la nappe $\text{vect}(X, Y)$) alors $\nu = \frac{X \wedge Y}{\|X \wedge Y\|}$. On sait que $\text{vol}(V(t)) = |\det(X, Y, t\nu)| = t |\det(X, Y, \nu)| = \text{aire}(D).t$ et donc l'aire de D est $|\det(X, Y, \nu)| = \|X \wedge Y\| = (\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2)^{\frac{1}{2}}$ (vérifier qu'on retrouve l'aire usuelle ie le déterminant de (X, Y) par rapport à une base orthonormée de $\text{vect}(X, Y)$). Si on paramètre $\text{vect}(X, Y)$ par $f : (u, v) \mapsto uX + vY$, l'expression de la première forme fondamentale dans ces coordonnées est constante : $\alpha_f = \begin{pmatrix} \|X\|^2 & \langle X, Y \rangle \\ \langle X, Y \rangle & \|Y\|^2 \end{pmatrix}$. La définition 3.3.2 donne $\text{aire}(D) = \int_{[0,1]^2} (\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2)^{\frac{1}{2}} d\mu$. C'est bien la même chose.

1. Tout point de $V(t)$ est à distance inférieure ou égale à t de Σ . Réciproquement, comme Σ est compacte pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ il existe $y \in \Sigma$ tel que $d(x, y) = \inf_{z \in \Sigma} d(x, z) = d(x, \Sigma)$. On a fini si on montre que $y - x$ est colinéaire à $\nu(y)$. La fonction $\delta_x : z \mapsto \|x - z\|^2$ est lisse, d'après le théorème des extrema liés : $\forall v \in T_y \Sigma, D\delta_x(y).v = \langle 2(y - x), v \rangle = 0$.

Plus t est petit meilleure est l'approximation. Si l'aire qu'on a défini est bien l'aire usuelle, on devrait avoir, au moins localement pour D assez petit, $\text{aire}(D) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(V(t))}{t}$.

On définit $F : U \times]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}^3$ par $F(x, s) = f(x) + sN_f(x)$. Cette application est lisse et $DF(x, 0)(h, k) = Df(x).h + kN_f(x) + 0$. On voit que $DF(x, 0)$ est toujours inversible, on peut appliquer le théorème d'inversion locale en tout point. Quitte à prendre un D plus petit, on peut restreindre U et ε de telle sorte que F soit un difféomorphisme lisse (on pourrait montrer que prendre D compact suffit). On pose $\Delta = f^{-1}(D)$. On peut donc appliquer la formule de changement de variables :

$$\text{vol}(V(t)) = \int_{F(\Delta \times [0, t])} dy_1 dy_2 dy_3 = \int_{\Delta \times [0, t]} |\det DF(x, s)| dx_1 dx_2 ds.$$

Par ailleurs $DF(x, s).(h, k) = Df(x).h + kN_f(x) + sDN_f(x).h$ donc

$$\det DF(x, s) = \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x)\right) + sA(x) + s^2B(x),$$

où A et B sont des termes qu'on ne détaillera pas impliquant des dérivées de N_f . En intégrant tout d'abord par rapport à s (on utilise le théorème de Fubini), on a donc

$$\text{vol}(V(t)) = \int_{\Delta} t \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x)\right) + \frac{t^2}{2}A(x) + \frac{t^3}{3}B(x) dx.$$

Ainsi l'aire de D est $\int_B \det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x)\right) dx$, or $\det\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, N_f(x)\right) = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\| = \sqrt{\det \alpha_f}$ (montrer cette dernière égalité). On a donc montré que

$$\text{Aire}(D) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(t)}{t} = \int_{f^{-1}(D)} \sqrt{\det \alpha_f(x)} dx.$$

Notre définition de l'aire coïncide donc (du moins localement) avec la notion intuitive d'aire.

Remarque : On peut continuer la discussion sur les bonnes coordonnées. Il est clair que les aires que l'on voit sur une carte correspondent à un facteur près aux aires réelles si et seulement si $\det(\alpha_f)$ est constant. Sur les mappemondes habituellement utilisées les aires lues ne correspondent pas aux aires réelles. Souvent le Groenland est de taille comparable à l'Afrique ou à l'Amérique du sud.

Il est possible de faire des mappemondes sur lesquelles les aires sont correctes (c'est le cas des cartes obtenues par projection de Peters), mais si les angles et les aires lues sont justes alors les longueurs le sont ce qui est impossible.

Exercice 4. 1) À l'aide des coordonnées $(\theta, h) \mapsto R(\sqrt{1-h^2} \cos \theta, \sqrt{1-h^2} \sin \theta, h)$ (projection de Peters) calculer l'aire des sphères (on admettra que S^2 et S^2 privée d'un arc de grand cercle ont même aire). En déduire la formule donnant le volume des boules.

2) Un triangle sphérique est un triangle tracé sur la sphère unité dont les côtés sont des arcs de grands cercles (ie de centre 0). Montrer qu'un triangle sphérique d'angles a, b et c est d'aire $a + b + c - \pi$.

3.4 Deuxième forme fondamentale. Courbure.

Pour faire comme les grecs, il nous faut faire varier nos mâts. On veut donc dériver l'application de Gauss.

On a vu dans la preuve de la proposition 2.4.2 que si γ est un arc différentiable à valeurs dans Σ alors $f^{-1} \circ \gamma$ est différentiable. On en déduit que si γ est un arc différentiable à valeurs dans Σ et si ν est une application de Gauss de Σ alors $\nu \circ \gamma$ est une application différentiable. En effet, $\nu \circ \gamma = (\nu \circ f) \circ (f^{-1} \circ \gamma)$ est la composée de deux applications différentiables. Comme il s'agit d'une propriété locale, on voit que cette propriété est encore vraie sur toute surface possédant une application de Gauss.

Définition 3.4.1. Soit Σ une nappe orientée, ν l'application de Gauss associée (ou plus généralement une surface munie d'une application de Gauss) et $p \in \Sigma$. La différentielle de ν en $p = f(x)$ est l'application linéaire $T_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$d_p\nu.X = (\nu \circ \gamma)'(0),$$

où γ est un arc différentiable tracé sur Σ tel que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$.

Pour voir que $d_p\nu(p).X$ ne dépend pas du choix de γ , on utilise des coordonnées (U, f) . On a vu que $\nu \circ f = N_f \circ (f^{-1} \circ \gamma)$, par ailleurs $Df(x).(f^{-1} \circ \gamma)'(0) = X$, ce qui signifie que $(f^{-1} \circ \gamma)'(0) = [Df(x)]^{-1}X$ (on voit $Df(x)$ comme un isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $T_p\Sigma$). On voit donc que

$$d_p\nu(p).X = DN_f(x).[Df(x)]^{-1}X.$$

Toute mention à γ a disparu. Remarquons qu'on a aussi montré que l'expression $DN_f(x).[Df(x)]^{-1}X$ ne dépend pas du choix de (U, f) .

Proposition 3.4.2. La différentielle de l'application de Gauss de Σ en p est un endomorphisme de $T_p\Sigma$. Cet endomorphisme est symétrique c'est-à-dire

$$\forall (X, Y) \in T_p\Sigma^2, \langle T_p\nu.X, Y \rangle = \langle X, T_p\nu.Y \rangle.$$

Preuve : On choisit des coordonnées (U, f) et on définit N_f comme précédemment.

Soit $X \in T_p\Sigma$ et $\xi = Df(x)^{-1}.X \in \mathbb{R}^2$. Par définition $d_p\nu.X = \frac{d}{dt}|_{t=0}(N_f)(x + t\xi)$. Il s'agit donc de la dérivée d'un arc lisse tracé sur S^2 . Donc $DN_f(x).\xi \in T_{\nu(p)}S^2$. Mais $T_{\nu(p)}S^2 = \nu(p)^\perp = T_p\Sigma$. Ce qui montre le premier point.

Pour montrer le deuxième point, il suffit de montrer que

$$\left\langle d_{f(x)}\nu.\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), d_{f(x)}\nu.\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right\rangle.$$

Par définition $d_{f(x)}\nu.\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial N_f}{\partial x_1}(x)$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \in T_{f(x)}\Sigma$ on a aussi $\left\langle N_f(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\rangle = 0$. En dérivant cette égalité, on a

$$\left\langle \frac{\partial N_f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle + \left\langle N_f, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle = 0.$$

D'après le théorème de Schwarz le terme de droite est symétrique, il en est donc de même de celui de gauche. $\square$

Exemples 3.4.3. Si Σ est la sphère S^2 alors $\nu = \pm \text{id}$ selon le choix de ν (rentrant ou sortant). Pour tout arc $\gamma : I \rightarrow S^2$ on a $\nu \circ \gamma = \pm \gamma$ et donc pour tout $p \in S^2$, $d_p\nu = \pm \text{Id}$

Soient $\mathcal{C}$ le cylindre droit défini à l'exercice 2 et (U, g) le paramétrage de $\mathcal{C}$ défini alors. Si on a fait l'exercice, on a trouvé $\nu \circ g(x_1, x_2) = (\cos x_1, \sin x_1, 0)$. On a donc

$$J(\nu \circ g)(x) = \begin{pmatrix} -\sin x_1 & 0 \\ \cos x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$d_{g(x)}\nu \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \text{ et } d_{g(x)}\nu \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) = 0.$$

Ainsi la matrice de $d_{g(x)}\nu$ dans la base $(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \frac{\partial g}{\partial x_2}(x))$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 3.4.4. On appelle endomorphisme de Weingarten (de Σ en p), l'endomorphisme symétrique

$$W_p = -d_p\nu : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma$$

(on fera attention au signe moins) et seconde forme fondamentale (de Σ en p) la forme bilinéaire symétrique définie par

$$II_p(X, Y) := -\langle d_p\nu \cdot X, Y \rangle = \langle W_p \cdot X, Y \rangle.$$

Remarque 3.4.5. Le fait que l'endomorphisme de Weingarten est symétrique ne signifie pas que sa matrice dans une base quelconque est symétrique (seule son écriture dans une base orthonormale l'est). Par contre, il est bien diagonalisable.

La proposition suivante donne une interprétation géométrique du nombre $II_p(X, X)$ (ainsi qu'une explication de la présence du signe $-$).

Proposition 3.4.6. Soient $p \in \Sigma$, (I, γ) un arc différentiable tracé sur Σ . Soit $p = \gamma(0)$ et $X = \gamma'(0)$. Alors

$$\langle \gamma''(0), \nu \rangle = -\langle d_p\nu \cdot X, X \rangle = II_p(X, X).$$

Preuve : Pour tout $t \in I$, on a $\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t)) \rangle = 0$. Par définition $(\nu \circ \gamma)'(0) = d_p\nu \cdot \gamma'(0)$ donc en dérivant la première égalité, on a $\langle \gamma''(0), \nu \rangle = -\langle \gamma'(0), d_p\nu \cdot \gamma'(0) \rangle$. $\square$

On rappelle que $\langle \gamma''(0), \nu \rangle \nu$ est la projection orthogonale de l'accélération sur la normale à $T_p\Sigma$. Si on note $\gamma''(0)^T$ la partie tangentielle, on a donc

$$\gamma''(0) = \langle \gamma''(0), \nu(p) \rangle \nu(p) + \gamma''(0)^T.$$

La proposition 3.4.6 nous dit que $\langle \gamma''(0), \nu \rangle$ ne dépend que de $\gamma'(0)$. C'est la partie de l'accélération qui permet à γ de rester dans Σ . Ainsi ce nombre décrit Σ . Il nous dit aussi comment se situe γ par rapport au plan (affine) tangent. En effet,

$$\gamma(t) = \underbrace{[p + tX + t^2/2 \gamma''(0)^T]}_{\in T_p^A \Sigma} + t^2/2 II(X, X) \nu(p) + o(t^2).$$

On voit qu'au voisinage de 0, la courbe est dans le demi-espace délimité par $T_p^A \Sigma$ contenant $p + \nu(p)$ si $II(X, X) > 0$ dans celui contenant $p - \nu(p)$ si $II(X, X) < 0$. On ne peut rien dire si $II(X, X) = 0$.

On peut écrire $\gamma = p + \gamma_0 + h \nu(p)$ avec γ_0 à valeurs dans $T_p\Sigma$ et h (comme hauteur) à valeurs dans $\mathbb{R}$. En comparant les développements limités on voit que $II_p(X, X) = h''(0)$ et que $h'(0) = 0$. On en déduit :

Fait 3.4.7. Soit Σ le graphe de $f_0 : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ lisse. Si $a \in U$ est tel que $Df(a) = 0$, alors en $p = (a, f_0(a))$, on a

$$II_p = D^2 f_0(a).$$

où $D^2 f_0$ est la différentielle seconde de f_0 .

Définition 3.4.8. On appelle courbure de Gauss de Σ au point p le déterminant de l'endomorphisme de Weingarten. On la note $K_\Sigma(p)$.

Exemples 3.4.9. Il découle de 3.4.3 que la courbure de la sphère unité est égale à 1 et que celle du cylindre est nulle (on dit que le cylindre est plat). Quelle est la courbure d'une sphère de rayon $R > 0$?

Remarque 3.4.10. L'endomorphisme W_p dépend du choix d'une orientation, mais pas son déterminant. Le signe de la courbure ne dépend pas du choix d'une orientation. On déduit de l'exercice 3 que pour toute isométrie Ψ de $\mathbb{R}^3$, $W_p^\Sigma = \pm W_{\Psi(p)}^{\Psi(\Sigma)}$ et $K_{\Psi(\Sigma)}(\Psi(p)) = K_\Sigma(p)$.

Exercice 5. Montrer que les valeurs propres de W_p sont les valeurs extrémales de l'application $X \mapsto II_p(X, X)$ restreinte aux vecteurs $X \in T_p\Sigma$ tels que $\|X\| = 1$. Elles correspondent donc aux directions dans lesquelles la surface se courbe le plus. On les appelle les *courbures principales*.

On remarque que le signe de la courbure nous dit si les deux courbures principales sont de même signe, autrement dit si les courbes correspondantes sont du même côté du plan tangent. On montre ainsi :

Proposition 3.4.11. Soit p un point p de Σ supposée plongée. Si $K_\Sigma(p) > 0$ alors il existe s'il existe un voisinage Ω de p tel que $\Omega \cap M \cap T_p^A M = \{p\}$. Si $K_\Sigma(p) < 0$ alors pour tout voisinage Ω de p il existe des points de $\Omega \cap M$ situés de part et d'autre de $T_A M$.

Preuve : Le problème étant invariant par isométrie affine, on peut supposer que $p = 0$ et $T_p\Sigma$ est le plan horizontal $\{x_3 = 0\}$. D'après le théorème des sous-variétés, il existe une fonction f_0 telle qu'au voisinage de p la nappe Σ est le graphe de f_0 . Le plan tangent en p étant horizontal on a $Df_0(0) = 0$. D'après le fait, 3.4.7 $II_p(0) = D^2 f_0(0)$. On écrit le développement limité de f_0 , il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que

$$f_0(x) = D^2 f(0).x^2 + \|x\|^2 \varepsilon(x).$$

Le déterminant de la hessienne est égal à $K(0)$. Si $K(0) > 0$ alors la hessienne est définie positive ou négative la fonction f_0 à un extremum local en 0. Si $K(0) < 0$ alors la hessienne est de signature $(1, 1)$, 0 n'est pas un extremum local. $\square$

On comparera avec le calcul de l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe et de son tangent affine demandé au chapitre précédent.

Expression locale de II .

On se donne des coordonnées (U, f) et, comme pour la première forme, on cherche la matrice symétrique, que l'on note β_f , de II dans le repère $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$. Soient A, B, C tels que

$$\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}^2$ et l'arc de U défini par $\gamma(t) = f(x_1 + \xi_1 t, x_2 + \xi_2 t)$. Ses dérivées sont :

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \xi_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x + t\xi) + \xi_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x + t\xi) \\ \gamma''(0) &= \xi_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \xi_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x). \end{aligned}$$

On a $II_p(\gamma'(0), \gamma'(0)) = \xi_1^2 A + 2\xi_1 \xi_2 B + \xi_2^2 C$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} II_p(\xi, \xi) &= \langle \gamma''(0), \nu \rangle \\ &= \left\langle \gamma''(0), \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x)}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \xi_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + 2\xi_1 \xi_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) + \xi_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \right) \\ &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|} \left[\xi_1^2 \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) \right) + 2\xi_1 \xi_2 \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + \xi_2^2 \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \right) \right]. \end{aligned}$$

Par identification, on en déduit que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) \right), \\ B &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) \right), \\ C &= \frac{1}{\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \wedge \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \right\|} \det \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) \right). \end{aligned}$$

On voit à nouveau que lorsque Σ est le graphe d'une fonction lisse $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f_0(0) = 0$ et $Df(0) = 0$, alors II_0 est la hessienne de f_0 en 0.

Proposition 3.4.12. Soit (U, f) des coordonnées locales sur Σ et α_f et β_f les expressions locales des deux formes fondamentales. Alors pour tout $x \in U$:

$$K_\Sigma(f(x)) = \det(\beta_f \alpha_f^{-1}) = \frac{AC - B^2}{EG - F^2}.$$

Preuve : Soit $\omega_f(x)$ la matrice de $T_p \nu(p)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x))$. Pour tout ξ, ζ on a

$$II_p(Df(x). \xi, Df(x). \zeta) = {}^t \xi \beta_f(x) \zeta.$$

Mais aussi

$$II_p(Df(x). \xi, Df(x). \zeta) = - \langle T_p \nu. Df(x). \xi, Df(x). \zeta \rangle = {}^t (\omega_f(x). \xi) \alpha_f(x). \zeta.$$

Donc ${}^t \omega_f \alpha_f = \beta_f$ ou si on préfère $\beta_f = \alpha_f \omega_f$. $\square$

Exemples 3.4.13. Une surface de révolution S est une surface paramétrée par une application de la forme :

$$f(u, v) = (\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_2(v))$$

où $0 < u < 2\pi$, $a < v < b$ et $\gamma_1(v) > 0$. L'arc $\gamma = (\gamma_1, 0, \gamma_2)$ est appelé la génératrice de S . La surface S est obtenue en faisant tourner γ autour de l'axe Ox_3 . Nous supposons la génératrice paramétrée par longueur d'arc, c'est-à-dire $(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = 1$. On a alors

$$\alpha_f = \begin{pmatrix} \gamma_1^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On utilise les formules ci-dessus pour calculer β_f .

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\gamma_1} \begin{vmatrix} -\gamma_1 \sin u & \gamma_1' \cos u & -\gamma_1 \cos u \\ \gamma_1 \cos u & \gamma_1' \sin u & -\gamma_1 \sin u \\ 0 & \gamma_2' & 0 \end{vmatrix} = -\gamma_1 \gamma_2', \\ B &= 0, \\ C &= \gamma_2' \gamma_1'' - \gamma_2'' \gamma_1'. \end{aligned}$$

On déduit de la proposition 3.4.12 que la courbure de S est donnée par

$$K_S = -\frac{\gamma'_2(\gamma'_2\gamma''_1 - \gamma''_2\gamma'_1)}{\gamma_1}.$$

Comme $(\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 = 1$, on a $\gamma'_1\gamma''_1 = -\gamma'_2\gamma''_2$ et donc

$$K_S = -\frac{\gamma'_2(\gamma'_2\gamma''_1 - \gamma''_2\gamma'_1)}{\gamma_1} = -\frac{(\gamma'_2)^2\gamma''_1 + \gamma''_1(\gamma'_1)^2}{\gamma_1} = -\frac{\gamma''_1}{\gamma_1}.$$

Remarquons que les vecteurs $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$ sont orthogonaux à la fois pour I et pour II . Il s'agit donc des directions principales de S . Les courbures principales sont donc données par

$$\begin{aligned} II\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right)/I\left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\right) &= -\frac{\gamma''_2}{\gamma_1} \\ II\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right)/I\left(\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) &= -\gamma'_2\gamma''_1 - \gamma''_2\gamma'_1. \end{aligned}$$

Exercice 6. Donner un exemple de surface de révolution à courbure constante négative.

Faire un dessin du tore T obtenu en prenant $\gamma = (2 + \cos v, 0, \sin v)$. Déterminer les points où la courbure est positive, ceux où elle est négative.

3.5 Theorema Egregium.

Partant de l'idée que ce que perçoit de Σ un de ses habitants (plats) c'est la première forme fondamentale et que pour comparer deux formes fondamentales on n'a que l'expression en coordonnées locales, on pose la définition suivante.

Définition 3.5.1. Deux nappes Σ_1 et Σ_2 sont dites isométriques s'il existe des coordonnées (U, f) et (V, g) resp. sur Σ_1 et Σ_2 telle que $\alpha_f = \alpha_g$.

Exemples 3.5.2. — L'existence de paramétrage par longueur d'arc dit que deux nappes de dimension 1 sont toujours localement isométriques.

- Un morceau de plan et un morceau de cylindre sont isométriques mais leurs deuxièmes formes fondamentales sont différentes.
- Soit p et q deux points de S^2 , il existe un voisinage Ω de p et un voisinage Ω' de q tels que $\Omega \cap S^2$ et $\Omega' \cap S^2$ sont isométriques.

La discussion sur la longueur des courbes lues sur une carte se reformule en : la sphère est-elle localement isométrique au plan ? La réponse est finalement donnée par le (remarquable) théorème suivant.

Théorème 3.5.3 (*Theorema Egregium* de Gauss). Deux nappes isométriques ont même courbure.

Preuve : Si on arrive à trouver des coordonnées (U, f) sur Σ pour lesquelles on sait calculer K en fonction des coefficients de α_f , le théorème sera prouvé. On cherche donc des coordonnées telles que α_f soit le plus simple possible (mais si le théorème est vrai alors α_f ne peut pas être trop simple non plus). Le lemme suivant qui sera prouvé plus tard donne de telles coordonnées.

Lemme 3.5.4. Au voisinage de tout point de Σ il existe des coordonnées (U, f) telles que

$$\alpha_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J^2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

où J est une fonction lisse partout non nulle.

On se place dans ces coordonnées et on écrit les vecteurs $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ dans la base $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \nu(f(x)))$. Il existe des coefficients (variables) traditionnellement notés $\Gamma_{i,j}^k$ et appelés *symboles de Christoffel* tels que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} + II\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) N_f, \quad (*)$$

le coefficient devant N_f a été obtenu à la proposition 3.4.2. Dans la suite on remplace la notation $\frac{\partial}{\partial x_i}$ par ∂_i . On note $\omega_f = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $\beta_f = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$.

On part des égalités $\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = 1$ et $\langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0$ et on dérive :

$$\begin{aligned} \partial_1(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) &= 2 \langle \partial_{11}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0, \\ \partial_2(\langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle) &= 2 \langle \partial_{21}^2 f, \partial_1 f \rangle = 0, \\ \partial_1(\langle \partial_2 f, \partial_1 f \rangle) &= \langle \partial_{12}^2 f, \partial_1 f \rangle + \langle \partial_2 f, \partial_{11}^2 f \rangle = 0. \end{aligned}$$

On voit donc que $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$ et donc $\partial_{11}^2 f = A N_f$. On a aussi $\Gamma_{12}^1 = 0$. On calcule maintenant Γ_{12}^2 :

$$2J\partial_1 J = \partial_1 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2 \langle \partial_{12}^2 f, \partial_2 f \rangle = 2\Gamma_{12}^2 \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle = 2\Gamma_{12}^2 J^2.$$

On note J' et J'' les dérivées $\partial_1 J$ et $\partial_{11}^2 J$. Par conséquent $\partial_{12}^2 f = \frac{J'}{J} \partial_2 f + B N_f$. D'après le lemme de Schwarz, on a $\partial_2(\partial_{11}^2 f) = \partial_1(\partial_{12}^2 f)$. En remplaçant par les expressions trouvées, on a

$$(\partial_2 A) N_f + A \partial_2 N_f = \partial_1 \left(\frac{J'}{J} \right) \partial_2 f + \frac{J'}{J} \partial_{12}^2 f + \partial_1 B N_f + B \partial_1 N_f.$$

Par définition la matrice de ω_f ci-dessus est celle $-D N_f$, d'où, en remplaçant à nouveau $\partial_{12}^2 f$:

$$(\partial_2 A) N_f - A(c\partial_1 f + d\partial_2 f) = \left(\frac{J''}{J} - \frac{J'^2}{J^2} \right) \partial_2 f + \frac{J'}{J} \left(\frac{J'}{J} \partial_2 f + B N_f \right) + (\partial_1 B) N_f - B(a\partial_1 f + b\partial_2 f).$$

En considérant le coefficient devant $\partial_2 f$, on obtient $\frac{J''}{J} = Ad - Bb$. Vu la forme de α_f et sachant que $\beta_f = \alpha_f \omega_f$, on a $A = a$ et $B = c$. Ainsi

$$-\frac{J''}{J} = ad - bc = \det(\omega_f) = K. \quad \square$$

Corollaire 3.5.5. *Quel que soit le bout de terre qu'elle représente une carte est toujours fausse.*

preuve du corollaire : Le plan et la sphère ont des courbures partout différentes. Ils sont nulle part isométriques. $\square$

La réciproque du *Theorema egregium* est fausse :

Exercice 7. Montrer que la nappe Σ paramétrée par

$$f : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, \log u)$$

et l'hélicoïde paramétré par

$$g : (u, v) \mapsto (u \cos v, u \sin v, v)$$

ont même courbure mais ne sont pas isométriques.

Exercice 8. Soit (U, f) des coordonnées sur Σ vérifiant les conclusions du lemme 3.5.4. Quitte à restreindre U on le suppose convexe. Soient (a, c) et (b, c) deux points de U et $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ l'arc paramétré défini par $\gamma(t) = f(ta + (1-t)b, c)$. Montrer que Γ est le plus court arc tracé sur Σ reliant $f(a, c)$ et $f(b, c)$. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma''(t)$ est perpendiculaire à $T_{\gamma(t)}\Sigma$.

3.6 Géodésiques.

Soit $p \in \Sigma$ et $X \in T_p \Sigma$. On cherche la trajectoire (I, γ) d'un point partant de p dans la direction X allant toujours droit devant lui tout en restant sur Σ . On cherche, en fait, l'analogue du mouvement rectiligne uniforme. Ce dernier est caractérisé par $\gamma'' = 0$. On a vu à la proposition 3.4.6 que $\langle \gamma'', \nu \rangle$ est imposé par Σ . A priori le terme

$$\gamma''(t) - \langle \gamma'', \nu(\gamma(t)) \rangle \nu(\gamma(t)),$$

la partie tangentielle de l'accélération est libre. On va demander qu'elle soit nulle. Il n'est pas nécessaire de demander à Σ d'être une nappe, tout ceci à un sens sur une surface de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3.6.1. *Un arc paramétré deux fois dérivable (I, γ) tracé sur Σ tel que pour tout $t \in I$ $\gamma''(t) \in T_{\gamma(t)} \Sigma^\perp$ est appelé une géodésique de Σ .*

On fera attention au fait que le reparamétrage d'une géodésique n'est pas forcément une géodésique.

Exemples 3.6.2. Les grands cercles de S^2 , c'est-à-dire les courbes obtenues en prenant l'intersection de la sphère avec un plan P passant par le centre de la sphère, sont des géodésiques de la sphère. Plus précisément, si (I, γ) est un paramétrage par longueur d'arc de $P \cap S^2$, alors $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$, de plus γ' et γ'' sont contenus dans P et non nuls. Ainsi $\{\gamma', \gamma''\}$ est une base orthogonale de P . Donc γ'' est proportionnel à ν .

De même si S est une surface de révolution paramétrée par $f(u, v) = (\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_2(v))$ (cf 3.4.13) alors les méridiens, ie les arcs paramétrés par $v \mapsto (\gamma_1(v) \cos u_0, \gamma_1(v) \sin u_0, \gamma_2(v))$ sont des géodésiques.

Proposition 3.6.3. *Les géodésiques sont toujours parcourues à vitesse constante.*

Preuve : Soit (I, γ) une géodésique. La dérivée de l'application $t \mapsto \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$ est donnée par $t \mapsto 2 \langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle$. Comme $\gamma''(t)$ est perpendiculaire au tangent ceci est nul. La norme de $\gamma'(t)$ est donc constante. $\square$

Théorème 3.6.4. *Pour tout point $p \in \Sigma$ et tout vecteur $X \in T_p \Sigma$, il existe une unique géodésique « maximale » (I, γ) telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$. Celle ci est lisse.*

Preuve : Soit (U, f) un système de coordonnées sur Σ et $c : I \rightarrow U$ un arc de U . On cherche à savoir à quelle condition $\gamma = f \circ c$ est une géodésique. On a

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= D^2 f(c(t)).c'(t)^2 + Df(c(t)).c''(t) \\ &= \sum_{i,j} c'_i(t) c'_j(t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c(t)) + \sum_k c''_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{aligned}$$

Ce qui donne en utilisant les $\Gamma_{i,j}^k$ vus plus haut :

$$\begin{aligned} \gamma''(t) - \langle \gamma''(t), \nu(\gamma(t)) \rangle \nu(\gamma(t)) &= \sum_{i,j} (c'_i(t) c'_j(t) \sum_k \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}) + \sum_k c''_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k} \\ &= \sum_k \left(c''_k(t) + \sum_{i,j} c'_i(t) c'_j(t) \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{\partial f}{\partial x_k}(c(t)) \end{aligned}$$

Ainsi γ est une géodésique si et seulement si pour $k = 1$ et $k = 2$ on a pour tout $t \in I$

$$c''_k(t) + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k c'_i(t) c'_j(t) = 0. \quad (**)$$

Ainsi (I, γ) est une géodésique si et seulement si (I, c) est une solution de l'équation différentielle ci-dessus. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet alors de conclure. $\square$

2. au sens des solutions d'équations différentielles

Exercice 9. Soit $(]a, b[, \gamma)$ la géodésique maximale telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$ et $k \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $(]a/k, b/k[, t \mapsto \gamma(kt))$ est la géodésique $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = kX$.

Montrer que les seules géodésiques de S^2 sont les grands cercles parcourus à vitesse constante.

Au vu de la définition donnée et de l'équation différentielle (**), on peut se demander si la notion de géodésique à un sens pour un "habitant" de Σ qui n'a pas conscience de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10. En exprimant de deux façons différentes $\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial f}{\partial x_k} \right\rangle$, montrer que l'on peut exprimer les $\Gamma_{i,j}^k$ en fonction de E, F, G et de leurs dérivées (c'est ce qu'on fait dans un cas particulier pour montrer le théorème de Gauss).

Début de solution :

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_1} \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\rangle = \frac{\partial F}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial x_2} \end{cases}$$

Ainsi les géodésiques ont bien un sens intrinsèque.

Preuve du lemme de Gauss 3.5.4 :

On a vu dans l'exercice 8 que les coordonnées données par le lemme de Gauss sont étroitement liées aux géodésiques de Σ (tous les segments horizontaux de U donnent des géodésiques). C'est précisément ce lien qui permet de montrer le lemme 3.5.4. D'après les théorèmes classiques sur les équations différentielles, tout couple $(x_0, v_0) \in u \times \mathbb{R}^2$, possède un voisinage ouvert $V \times W$ et un $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $(x, v) \in V \times W$ il existe une unique solution $c_{x,v}$ l'équation différentielle (**), définie sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ et de condition initiale (x, v) . De plus (c'est le théorème de dépendance aux conditions initiales, cf. Laudenbach p.94 théorème IV.1.2. par exemple), l'application

$$\begin{aligned} \Phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times V \times W &\rightarrow U \\ (t, x, v) &\mapsto c_{x,v}(t) \end{aligned}$$

est lisse. On déduit de l'exercice 9 qu'il existe $\delta > 0$ tel que Φ est définie sur $] -2, 2[\times V \times B(0, \delta)$. La restriction de Φ à $\{1\} \times \{x\} \times B(0, \delta)$ est une application lisse traditionnellement notée $\exp_x$ ³. Par définition $\exp_x(v) = \Phi(1, x, v) = c_{x,v}(1)$.

Lemme 3.6.5. Pour tout $x \in U$, l'application $\exp_x$ est un difféomorphisme local au voisinage de 0.

Preuve : L'application $\exp_x$ est lisse, il suffit donc de montrer que la différentielle en 0 est inversible. Pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, on a (on utilise encore l'exercice 9) :

$$D \exp_x(0).v = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \exp_x(sv) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c_{x,sv}(1) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} c_{x,v}(s) = v.$$

Ainsi $D \exp_x(0) = \text{Id}$. $\square$

Soit (X_1, X_2) une base orthonormée de $T_{f(x)}\Sigma$ et soit $(\xi_1, \xi_2) = ([Df(x)]^{-1}X_1, [Df(x)]^{-1}X_2)$. Pour $\rho > 0$ assez petit l'application Φ_0 définie sur $]0, \rho[\times [0, 2\pi[$ par $\Phi_0(r, \theta) = r(\cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2)$ a son image dans $B(0, \delta)$. La restriction de $\exp_x \circ \Phi_0$ à $]0, \rho[\times [0, 2\pi[$ est donc un difféomorphisme sur son image (contenue dans U).

3. en fait ce qu'on appelle habituellement exponentielle c'est l'application $f \circ \exp_x \circ [Df(x)]^{-1}$ qui va d'un voisinage de 0 dans $T_p\Sigma$ dans un voisinage de p dans Σ

On définit maintenant des nouvelles coordonnées locales (V, g) sur Σ . On prend $V =]0, \rho[\times]0, 2\pi[$ et $g = f \circ \exp_x \circ \Phi_0$. Montrons que α_g est de la forme voulue.

Soit γ_θ l'arc défini par $\gamma_\theta(r) = g(r, \theta)$. Par construction, il s'agit d'un arc géodésique. On a donc :

$$\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = \langle \gamma'_\theta(r), \gamma'_\theta(r) \rangle = \langle \gamma'_\theta(0), \gamma'_\theta(0) \rangle = \|\cos(\theta)X_1 + \sin(\theta)X_2\|^2 = 1.$$

On veut maintenant montrer que $\langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_r \langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle &= \langle \partial_{rr}^2 g, \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= \langle \gamma''_\theta(r), \partial_\theta g \rangle + \langle \partial_r g, \partial_{r\theta}^2 g \rangle \\ &= 0 + \frac{1}{2} \partial_\theta \langle \partial_r g, \partial_r g \rangle = 0, \end{aligned}$$

puisque γ_θ est une géodésique et que $\langle \partial_r g, \partial_r g \rangle$ est constant. Par ailleurs

$$\partial_\theta g(r, \theta) = \partial_\theta (f \circ \exp_x(r(\cos(\theta)\xi_1 + \sin(\theta)\xi_2))) = D(f \circ \exp_x)(\Phi_0(r, \theta)) \cdot (r(-\sin(\theta)\xi_1 + \cos(\theta)\xi_2)).$$

On en déduit que $\lim_{r \rightarrow 0} \partial_\theta g(r, \theta) = 0$ et donc $\lim_{r \rightarrow 0} \langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle = 0$. Or, d'après ce qui précède $\langle \partial_r g, \partial_\theta g \rangle$ ne dépend pas de r et donc α_g a bien la forme voulue ! $\square$

Corollaire 3.6.6. *Les géodésiques sont exactement les courbes qui minimisent localement la longueur. Si une courbe minimise globalement la longueur alors c'est une géodésique.*

Autrement dit si 2 points sont suffisamment proches il existe un plus court chemin les reliant et ce chemin est un arc de géodésique.

Preuve : Si y est suffisamment proche de x , alors il existe v tel que $y = \exp_x(v)$. En se plaçant dans les coordonnées données par le lemme de Gauss, on déduit de l'exercice 8 que le segment géodésique $t \mapsto \exp_x(tv)$ minimise la longueur.

Inversement si γ est le plus court chemin reliant deux points, il minimise aussi la longueur entre chacun de ses points. En les choisissant suffisamment proche on en déduit que γ est une géodésique. $\square$.

Chapitre 4

Formes différentielles

4.1 Algèbre tensorielle.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n . On rappelle qu'une application $L : E^k \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une forme k -linéaire si pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a $L(v_1, \dots, av_i + bw_i, \dots, v_k) = aL(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + bL(v_1, \dots, w_i, \dots, v_k)$, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, v_i et $w_i \in E$.

Définition 4.1.1 Soit L une forme k -linéaire sur E . On dira que L est alternée si, pour toute permutation σ de $\{1, \dots, k\}$ et tout $(v_1, \dots, v_k) \in E^k$, on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \varepsilon(\sigma)L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature¹ de σ . On notera $\bigwedge^k E^*$ l'espace vectoriel des k formes linéaires alternées.

On pose $\bigwedge^0 E^* = \mathbb{R}$, une 0 forme linéaire alternée est une constante.

Lorsque $k = 1$, L est simplement une forme linéaire et $\bigwedge^1 E^* = E^*$. Lorsque $k = 2$, cela signifie $L(v, w) = -L(w, v)$.

Exercice 1 Montrer qu'une forme k -linéaire L est alternée si et seulement si $\{v_1, \dots, v_k\}$ linéairement dépendants implique $L(v_1, \dots, v_k) = 0$.

Si $\dim E = n$, l'application qui à n vecteurs de E associe leur déterminant relativement à une base donnée appartient à $\bigwedge^n E^*$. C'est l'exemple de base à avoir en tête. On peut le décliner pour produire des éléments de $\bigwedge^k E^*$ avec $1 < k < n$. Pour cela, on se donne une projection p sur un sous-espace vectoriel F de E de dimension k et une base $\mathcal{B}_F$ de F . L'application :

$$(v_1, \dots, v_k) \mapsto \det_{\mathcal{B}_F}(p(v_1), \dots, p(v_k)),$$

appartient bien à $\bigwedge^k E^*$. En généralisant très légèrement cette construction on a :

Proposition 4.1.2 Soit $(L_1, \dots, L_k) \in (E^*)^k$. L'application notée $L_1 \wedge \dots \wedge L_k$ et définie par

$$L_1 \wedge \dots \wedge L_k(v_1, \dots, v_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) L_1(v_{\sigma(1)}) \dots L_k(v_{\sigma(k)}) = \det((L_i(v_j))_{i,j}),$$

où $\mathfrak{S}_k$ désigne le groupe symétrique de degré k , est une forme k -linéaire alternée ie un élément de $\bigwedge^k E^*$.

De plus, cette forme est nulle si et seulement la famille $\{L_1, \dots, L_k\}$ est liée et pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_k$, on a

$$L_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge L_{\sigma(k)} = \varepsilon(\sigma) L_1 \wedge \dots \wedge L_k.$$

Preuve On déduit directement des propriétés du déterminant que $L_1 \wedge \dots \wedge L_k$ est k -linéaire et alterné. Si les L_i sont liés, alors quels que soient les v_j , les vecteurs colonnes de la matrice $(L_i(v_j))_{i,j}$ sont liés. Réciproquement si elles forment une famille libre on peut trouver des vecteurs $v_1, \dots, v_k$ tels que $L_i(v_j) = \delta_{i,j}$ i.e. 1 si $i = j$ et 0 sinon (on complète la famille en une base de $\mathbb{R}^{n*}$ dont on prend la base duale). On a alors $L_1 \wedge \dots \wedge L_k(v_1, \dots, v_k) = 1 \neq 0$.

1. la signature est l'unique morphisme de groupe non trivial allant du groupe des permutations dans $\{-1, 1\}$

Appliquer une permutation σ aux lignes d'une matrice multiplie son déterminant par $\varepsilon(\sigma)$. Par conséquent, quelque soient $V_1, \dots, v_k$, $\det(L_{\sigma(i)}(v_j)_{i,j}) = \varepsilon(\sigma) \det(L_i(v_j)_{i,j})$. Ce qui montre le dernier point.

Exemples 4.1.3 Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E de base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ et $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$. On a $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 1$ si et seulement si $(i_1, \dots, i_k) = (j_1, \dots, j_k)$ et $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0$ sinon. Ainsi la famille $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ est libre.

Théorème 4.1.4 Si $L \in \bigwedge^k E^*$ et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E de base duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ alors

$$L = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*.$$

Preuve On note $v_j = \sum_{i=1}^n v_j^i e_i$. Comme L est multilinéaire on a

$$L(v_1, \dots, v_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k} v_1^{i_1} \dots v_k^{i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

(autrement dit $L = \sum_{i_1, \dots, i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \otimes \dots \otimes e_{i_k}^*$).

Si les $i_1, \dots, i_k$ ne sont pas tous distincts alors $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = 0$. S'ils sont tous distincts il existe une unique permutation σ telle que $i_{\sigma(1)} < \dots < i_{\sigma(k)}$. De plus $L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) = \varepsilon(\sigma) L(e_{i_{\sigma(1)}}, \dots, e_{i_{\sigma(k)}})$. D'où

$$\begin{aligned} L(v_1, \dots, v_k) &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_1^{i_{\sigma(1)}} \dots v_k^{i_{\sigma(k)}} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) v_{\sigma(1)}^{i_1} \dots v_{\sigma(k)}^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) e_{i_1}^*(v_{\sigma(1)}) \dots e_{i_k}^*(v_{\sigma(k)}) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} L(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Corollaire 4.1.5 Si $k > n$ l'espace vectoriel $\bigwedge^k E^*$ est réduit à 0. Si $1 \leq k \leq n$ la famille $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ est une base de $\bigwedge^k E^*$ et $\dim(\bigwedge^k E^*) = \binom{n}{k}$.

Preuve : Si $k > n$ il n'existe pas de suites $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. Le théorème 4.1.4 nous dit que cette famille engendre $\bigwedge^k E^*$. On a vu à l'exemple 4.1.3 qu'elle est libre. Enfin son cardinal est $\binom{n}{k}$ $\square$

Pour alléger les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on notera $\underline{i}$ le multi-indice $i_1, \dots, i_k$.

Définition 4.1.6 Soient $L = \sum_{\underline{i}} L_{\underline{i}} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \in \bigwedge^k E^*$ et $T = \sum_{\underline{j}} T_{\underline{j}} e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_\ell}^* \in \bigwedge^\ell E^*$.

Le produit extérieur de L et de T est la $k + \ell$ forme alternée notée $L \wedge T$ et définie par

$$L \wedge T = \sum_{\underline{i}, \underline{j}} L_{\underline{i}} T_{\underline{j}} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \wedge e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_\ell}^*.$$

L'opération ainsi définie est clairement bilinéaire et associative. Il est plus délicat de montrer qu'elle ne dépend pas du choix d'une base (c'est le point faible de notre approche). Pour ce faire, on peut montrer que :

$$L \wedge T(v_1, \dots, v_{k+\ell}) = \sum_{\sigma \in \Gamma_{k,\ell}} \varepsilon(\sigma) L(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) T(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}),$$

où $\Gamma_{k,\ell}$ est le groupe des permutations de $\{1, \dots, k + \ell\}$ telles que

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(k), \quad \text{et} \quad \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+\ell)$$

(on peut penser à un mélange de cartes « américain »). Le cas $\ell = 1$ est l'objet de l'exercice suivant : (on admettra le cas $\ell > 1$) :

Exercice 2 Si $T \in E^*$ et $L \in \bigwedge^k E^*$, , montrer que

$$L \wedge T(v_1, \dots, v_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+k+1} L(v_1, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_{k+1}) T(v_i).$$

La notation $\widehat{v}_i$ indiquant que le terme v_i est absent !

Remarquons aussi qu'on a deux définitions du produit alterné de m formes linéaires, celle donnée ci-dessus et celle donnée par la proposition 4.1.2. L'exercice 2 permet aussi de montrer par récurrence que ces deux définitions sont bien les mêmes (en utilisant la formule du développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne). En résumé, on a donc :

Proposition 4.1.7 *Le produit extérieur de deux formes multilinéaires alternées L et T ne dépend pas du choix d'une base. Il est bilinéaire, associatif et vérifie $L \wedge T = (-1)^{kl} T \wedge L$ pour tout $L \in \bigwedge^k E^*$ et $T \in \bigwedge^\ell E^*$.*

4.2 Formes différentielles

Définition 4.2.1 *Une forme différentielle de degré k (ou k -forme différentielle) lisse sur un ouvert U d'un espace vectoriel E (de dimension finie) est une application lisse de U dans $\bigwedge^k E^*$. L'espace vectoriel des formes de degré k sur U est noté $\Omega^k(U)$.*

Un élément de $\Omega^0(U)$ est une fonction lisse de U dans $\mathbb{R}$. La différentielle d'une fonction lisse f de U dans $\mathbb{R}$ appartient à $\Omega^1(U)$, on la notera df .

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $\alpha \in \Omega^k(U)$, pour tout $x \in U$, il existe des réels $\alpha_{i_1, \dots, i_k}(x)$ tels que :

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(x) e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*.$$

Comme e_i^* est la différentielle de l'application i^{eme} coordonnée $x \mapsto x^i$ on écrit

$$\alpha_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Les fonctions $\alpha_{i_1, \dots, i_k}$ sont obtenues en composant α avec des applications coordonnées et sont donc lisses. La différentielle d'une application lisse $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, notée df , s'écrit

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

La définition du produit extérieur s'étend aux formes différentielles. Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^\ell(U)$, on pose $(\alpha \wedge \beta)_x = (\alpha_x \wedge \beta_x)$. On peut vérifier que les fonctions $(\alpha \wedge \beta)_{i_1, \dots, i_{k+\ell}}$ sont lisses.

Définition 4.2.2 *Soit U et V des ouverts d'espaces vectoriels et f une application lisse de U dans V . L'image réciproque par f de $\alpha \in \Omega^k(V)$, notée $f^*\alpha$, est la forme sur U définie par*

$$(f^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(x)}(Df(x).v_1, \dots, Df(x).v_k).$$

On note $y^1, \dots, y^m$ les coordonnées sur V et $(f^1, \dots, f^m)$ les composantes de f . On remarque que $dy^i(Df(x).v) = (df^i)_x(v)$. Ainsi si $\alpha_y = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}$, alors $(f^*\alpha)_x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(f(x)) (df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k})_x$. Il ne reste plus qu'à développer grâce à la multilinéarité du produit extérieur.

Exemples 4.2.3 Prenons $U = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}_+^*$ et $f(t) = e^t$. Alors $f^*(dx/x) = \frac{1}{f(t)} df(t) = dt$.

Si $U = V = \mathbb{R}^2$ et $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v)$, on a

$$f^*(dx^1 \wedge dx^2) = (\cos v du - u \sin v dv) \wedge (\sin v du + u \cos v dv) = u du \wedge dv.$$

Plus généralement (exercice) si U et V sont des ouverts de même dimension n

$$f^*(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = (\det Df(x))(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n).$$

Proposition 4.2.4 Soit $f : U \rightarrow V$ une application lisse.

1) Pour tout α et β dans $\Omega^k(V)$, on a

$$f^*(\alpha + \beta) = f^*\alpha + f^*\beta.$$

2) Pour tout $\alpha \in \Omega^k(V)$ et $\beta \in \Omega^l(V)$, on a

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = (f^*\alpha) \wedge (f^*\beta).$$

3) Soient $g : V \rightarrow W$ est une autre application lisse et $\alpha \in \Omega^k(W)$. Alors,

$$(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha).$$

Preuve : 1) en exercice, 2) admis, prouvons 3)

$$\begin{aligned} ((g \circ f)^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) &= \alpha_{g \circ f(x)}(D(g \circ f)(x).v_1, \dots, D(g \circ f)(x).v_k) \\ &= \alpha_{g \circ f(x)}(Dg(f(x)).Df(x).v_1, \dots, Dg(f(x)).Df(x).v_k) \\ &= (g^*\alpha)_{f(x)}(Df(x).v_1, \dots, Df(x).v_k) \\ &= (f^*(g^*\alpha))_x(v_1, \dots, v_k) \quad \square \end{aligned}$$

4.3 Différentielle extérieure

On note $\Omega(U)$ la somme directe des $\Omega^k(U)$, ie on pose $\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(U)$. La différentielle permet d'associer une 1 forme à une 0 forme (ie une fonction). On étend ceci aux k formes différentielles.

Théorème 4.3.1 Soit U un ouvert d'un espace vectoriel E . Il existe une application linéaire $d : \Omega(U) \rightarrow \Omega(U)$ et une seule ayant les propriétés suivantes :

- i) si $\alpha \in \Omega^k(U)$ alors $d\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$.
- ii) la restriction de d à $\Omega^0(U)$ est la différentielle des fonctions.
- iii) si $\alpha \in \Omega^k(U)$, alors $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$.
- iv) $d \circ d = 0$.

Preuve : Montrons d'abord l'unicité. Si $d \circ d = 0$ on a $d(dx^i) = 0$. En utilisant iii) on a donc $d(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = 0$ pour tout $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$. On en déduit que

$$d(f dx^{i_1} \wedge dx^{i_k}) = df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Si $\alpha \in \Omega^k(U)$ s'écrit

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

en utilisant la linéarité de d on a forcément

$$d\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} d\alpha_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (\star)$$

Il faut voir maintenant que cette formule convient...

L'expression $(\star)$ est bien linéaire, elle vérifie clairement i) et ii). Pour prouver iii), il suffit de considérer le cas où

$$\alpha = f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \text{et} \quad \beta = g dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l}.$$

Alors

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= d(fg) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= (f dg + g df) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ d\alpha \wedge \beta &= g df \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ \alpha \wedge d\beta &= f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dg \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= (-1)^k f dg \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \end{aligned}$$

Voyons que $d \circ d = 0$. Commençons par les fonctions. On a $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. D'après $(\star)$, on a donc

$$d(df) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^j \right) \wedge dx^i = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^i = 0,$$

d'après le théorème de Schwarz.

Toujours d'après $(\star)$, $d(dx^i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc pour toute k forme α

$$d(d\alpha) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d(d\alpha_{i_1, \dots, i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0.$$

Ce qui termine la preuve du théorème.

Exemples 4.3.2 Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et si $\alpha = Pdx + Bdy + Cdz$, alors

$$d\alpha = \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right) dz \wedge dx.$$

Si $\beta = P(dy \wedge dz) + Q(dz \wedge dx) + R(dx \wedge dy)$,

$$d\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Définition 4.3.3 L'opérateur ainsi défini s'appelle la différentielle extérieure.

Si $d\alpha = 0$ on dit que α est fermée. S'il existe β telle que $d\beta = \alpha$. On dit que α est exacte.

On peut donc exprimer la proposition $d \circ d = 0$ par une forme exacte est fermée. Attention, la réciproque est fautive. Comme on le verra plus tard la 1 forme sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donnée par $\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ est fermée mais non exacte.

Proposition 4.3.4 La différentielle extérieure et l'image réciproque commutent, c'est-à-dire si U et V sont des ouverts d'espaces vectoriels et si φ est une application lisse de U dans V , alors pour tout $\alpha \in \Omega(V)$, on a

$$\varphi^*(d\alpha) = d(\varphi^*\alpha)$$

Preuve : Commençons par les 0 formes, ie les fonctions. Dans ce cas la formule devient

$$d(f \circ \varphi) = \varphi^* df,$$

où l'on reconnaît le théorème de dérivation composée.

Par linéarité il suffit de montrer le résultat pour les formes qui s'écrivent $f dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. On a vu que

$$\varphi^*\alpha = (f \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k},$$

où les φ_i sont les composantes de φ . On a donc

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\alpha) &= d(f \circ \varphi) \wedge d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_k}, \\ &= (\varphi^* df) \wedge \varphi^*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) \\ &= \varphi^*(d\alpha) \quad \square \end{aligned}$$

On peut donc dire que l'image réciproque d'une forme fermée (resp. exacte) est une forme fermée (resp. exacte).

4.4 Le lemme de Poincaré.

Définition 4.4.1 Un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit étoilé s'il existe $a \in U$ tel que pour tout $x \in U$ le segment $[a, x]$ est contenu dans U .

On peut maintenant formuler le Lemme de Poincaré.

Théorème 4.4.2 (Lemme de Poincaré) Si $U \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert étoilé, toute forme fermée sur U est exacte.

Preuve : Pour alléger les notations on suppose que U est étoilé par rapport à l'origine. Montrons ce résultat pour les 1 formes. Soit $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ vérifiant $d\alpha = 0$. Soit f la fonction définie sur U par

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x^i \int_0^1 \alpha_i(tx) dt.$$

Remarquons que ceci a un sens car pour tout $x \in U$ le segment $[0, x] \subset U$.

Calculons sa différentielle

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_i(tx) dt \right) dx^i + \sum_{i=1}^n x^i \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 t \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx) dt \right) dx^j \quad (4.1)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_j(tx) dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 t x^i \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}(tx) dt \right) dx^j \quad (4.2)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_j(tx) dt + \sum_{i=1}^n \int_0^1 t x^i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}(tx) dt \right) dx^j \quad (4.3)$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \alpha_j(tx) dt + \int_0^1 t \frac{d}{dt} \alpha_j(tx) dt \right) dx^j \quad (4.4)$$

$$= \sum_{j=1}^n \alpha_j dx^j = \alpha \quad (4.5)$$

Le passage de la ligne 2) à la ligne 3) se fait en utilisant $d\alpha = 0$ celui de la ligne 4) à la ligne 5) en intégrant par parties.

Pour une forme de degré quelconque, on peut aussi produire une primitive par intégration. Si $\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$, on définit une k forme $I(\alpha)$ par

$$I(\alpha) = \sum_{i_1 < \dots < i_{k+1}} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} \left(\int_0^1 t^k \alpha_{i_1, \dots, i_{k+1}}(tx) dt \right) x^{i_j} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_j}} \wedge \dots \wedge dx^{i_{k+1}}$$

ou

$$I(\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \int_0^1 t^k \alpha_{tx}(x, v_1, \dots, v_k) dt$$

On peut montrer que pour toute forme différentielle α , on a $d(I(\alpha)) + I(d\alpha) = \alpha$. Lorsque $d\alpha = 0$ on a le résultat voulu ($I(0) = 0$). On pourra consulter le livre de M. Spivak : *Calculus on manifolds* p.94 pour la preuve et le livre de J. Lafontaine *introduction aux variétés différentielles* pour une explication de comment on en arrive à une telle formule. $\square$

Corollaire 4.4.3 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \Omega^k(U)$. Si U est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ et si $d\alpha = 0$ alors α est exacte.

Preuve : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ un difféomorphisme. La proposition 4.3.4 nous dit que $f^*\alpha$ est fermée. D'après le lemme de Poincaré, il existe $\beta \in \Omega^{k-1}$ telle que $d\beta = f^*\alpha$. En utilisant 4.2.4 et à nouveau 4.3.4 et , on a

$$d(f^{-1*}\beta) = f^{-1*}d\beta = f^{-1*}f^*\alpha = \alpha.$$

Ce qui montre que α est exacte. $\square$

Si on peut montrer qu'il existe une 1-forme fermée non-exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a donc

Corollaire 4.4.4 $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}^2$.

4.5 1-formes fermées et intégrales.

Définition 4.5.1 Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\alpha \in \Omega^1(U)$, $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ continue et $a = t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ tels que la restriction de γ à chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ est de classe C^1 (on dit alors que γ est de classe C^1 par morceaux). On définit alors l'intégrale de α le long de γ comme

$$\int_{\gamma} \alpha := \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma_i^* \alpha = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{(\gamma(t))} \cdot \gamma_i'(t) dt,$$

où γ_i désigne la restriction de γ à $[t_i, t_{i+1}]$.

Il est facile de vérifier que si on effectue un changement de paramétrage *croissant* (C^1) sur γ l'intégrale ne change pas mais qu'elle est transformée en son opposé si celui-ci est décroissant. En effet

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha_{(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(t_i)}^{\varphi^{-1}(t_{i+1})} \alpha_{(\gamma \circ \varphi(t))} \cdot \gamma'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Si α est exacte, c'est-à-dire s'il existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ lisse telle que $df = \alpha$ alors cette intégrale ne dépend que des extrémités de γ :

$$\int_{\gamma} df = \int_a^b f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier si $\gamma(a) = \gamma(b)$ alors

$$\int_{\gamma} df = 0.$$

On a donc un moyen de tester si une forme est exacte. Essayons le. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\alpha = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$. Prenons $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U$ défini par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. On a

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_0^{2\pi} (\cos t)(\cos t) - (\sin t)(-\sin t) dt = 2\pi \neq 0$$

Ainsi α n'est pas fermée, ce qui prouve 4.4.4. Il existe une réciproque :

Proposition 4.5.2 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ connexe par arcs et $\alpha \in \Omega^1(U)$. La forme α est exacte si et seulement si pour tout lacet γ de classe C^1 par morceaux $\int_{\gamma} \alpha = 0$*

Preuve : On se donne un point $x_0 \in U$. Pour tout $x \in U$, il existe un chemin C^1 par morceaux γ qui relie x_0 à x . Si l'intégrale sur tout lacet est nulle alors $\int_{\gamma} \alpha$ ne dépend pas du choix de γ (à vérifier). Ainsi, la fonction f définie par $f(x) = \int_{\gamma} \alpha$ est bien définie.

On considère le chemin γ_i défini sur un voisinage de 0 par $t \mapsto x + te_i$. On désigne par $\gamma + \gamma_i$ le chemin C^1 par morceaux obtenu en mettant bout à bout les chemins γ et γ_i . On a dès lors

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + te_i) - f(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\int_{\gamma + \gamma_i} \alpha - \int_{\gamma} \alpha \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_{\gamma_i} \alpha \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_i(x + te_i) dt = \alpha_i(x). \end{aligned}$$

□

Cette réciproque semble impossible à mettre en oeuvre, on ne peut pas intégrer sur tous les lacets de U . En fait, il suffit d'en choisir correctement un certain nombre... Par exemple :

Proposition 4.5.3 *Soit $C : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ donné par $C(t) = (\cos t, \sin t)$. Si $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ vérifie $d\alpha = 0$ et $\int_C \alpha = 0$, alors α est exacte.*

Preuve : Soit U^+ (resp. U^-) égal à $\mathbb{R}^2$ privé de la demi-droite d'équation $x = 0$ et $y \geq 0$ (resp. $x = 0$ et $y \leq 0$). D'après le lemme de Poincaré, il existe $f^{\pm} : U^{\pm} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $df^{\pm} = \alpha|_{U^{\pm}}$.

Sur un ouvert connexe deux primitives d'une 1-forme diffèrent d'une constante (ce n'est plus vrai pour les k -formes si $k > 1$).

On a $U^+ \cap U^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$ qui n'est pas connexe. Ses composantes connexes sont $\{(x, y) | x > 0\}$ et $\{(x, y) | x < 0\}$. Sur chacun de ces ouverts connexes, on a donc deux primitives d'une même forme.

Ainsi il existe $c_+ \in \mathbb{R}$ (resp. c_-) telle que $f^+(x, y) = f^-(x, y) + c_+$ (resp. $f^+(x, y) = f^-(x, y) + c_-$) si $x > 0$ (resp. si $x < 0$). Quitte à remplacer f^- par $f^- + c_-$ on peut supposer $c_- = 0$. Dès lors α est exacte si et seulement si $c_+ = 0$.

Remarquons que la restriction de C à $[0, \pi]$ (resp. $[\pi, 2\pi]$) arrive dans U_- (resp. U_+). Ainsi

$$\begin{aligned} 0 = \int_C \alpha &= \int_0^{\pi} \alpha(C(t)) C'(t) dt + \int_{\pi}^{2\pi} \alpha(C(t)) C'(t) dt \\ &= [f^-(C(t))]_0^{\pi} + [f^+(C(t))]_{\pi}^{2\pi} = f^-(-1, 0) - f^-(1, 0) + f^+(1, 0) - f^+(-1, 0) = c_+ \end{aligned}$$

□

Exercice 3 Dédurre de 4.5.3 que si α est une 1 forme fermée sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ alors il existe un réel k et une fonction f tels que $\alpha = k \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} + df$

Comme on peut le pressentir à la lecture de la preuve, la proposition 4.5.3 est un cas particulier d'un résultat plus général.

4.6 Intégration sur les cubes singuliers

On notera I l'intervalle $[0, 1]$ et donc I^k de cube $[0, 1]^k \subset \mathbb{R}^k$.

Définition 4.6.1 Un cube singulier de dimension k de $\mathbb{R}^n$ est une application lisse² c de I^k dans $\mathbb{R}^n$.

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^k$ contenant I^k et $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^k)$. Il existe une fonction f telle que $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$. On pose alors

$$\int_{I^k} \omega = \int_{I^k} f(x) dx^1 \dots dx^k.$$

Soit c est un cube singulier de dimension k et soit U est un ouvert de E contenant $c(I^k)$. On définit l'intégrale de $\omega \in \Omega^k(U)$ sur c par

$$\int_c \omega = \int_{I^k} c^* \omega.$$

Si $k = 0$ on a $c : \{0\} \rightarrow E$, ω est une fonction et $\int_c \omega = \omega(c(0))$.

Définition 4.6.2 Une chaîne singulière C est une liste de cubes singuliers $\{c_1, \dots, c_d\}$ de même dimension chacun ayant un poids $a_i \in \mathbb{R}$. Au lieu d'écrire $C = \{(c_i, a_i), i = 1, \dots, d\}$, on écrit une somme formelle $C = \sum_{i=1}^d a_i c_i$.

L'intégrale de ω sur $C = \sum_{i=1}^d a_i c_i$ est définie par

$$\int_C \omega = \sum_{i=1}^d a_i \int_{c_i} \omega = \sum_{i=1}^d a_i \int_{I^k} c_i^* \omega.$$

Le cube I^k a $2k$ faces qui sont isomorphes à des cubes I^{k-1} (il y a 2 points aux extrémités d'un segment, un carré a 4 côtés, un cube 6 faces). Ces faces sont les images des $2k$ cubes singuliers suivants :

$$\begin{aligned} I_{(i,0)}^k : \quad I^{k-1} &\rightarrow I^k \\ (x^1, \dots, x^{k-1}) &\mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^{k-1}) \\ I_{(i,1)}^k : \quad I^{k-1} &\rightarrow I^k \\ (x^1, \dots, x^{k-1}) &\mapsto (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^{k-1}) \end{aligned}$$

où $1 \leq i \leq k$. On attribue au cube singulier $I_{(i,\alpha)}^k$ le poids $(-1)^{i+\alpha}$. Lorsque $k = 3$, la raison d'un tel choix est donnée par l'exercice suivant (une explication similaire existe pour tout k).

Exercice 4 Montrer le poids associé à $I_{(i,\alpha)}^3$ est égal à 1 si et seulement si l'application de Gauss de $I_{(i,\alpha)}^3$ est sortante.

Définition 4.6.3 Le bord du cube I^k est la chaîne singulière

$$\partial I^k = \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} I_{(i,\alpha)}^k.$$

Le bord d'un cube singulier $c : I^k \rightarrow E$ est la chaîne

$$\partial c = \sum_{i=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} (c \circ I_{(i,\alpha)}^k).$$

Le bord d'une chaîne singulière $C = \sum a_i c_i$ est la chaîne singulière

$$\partial C = \sum a_i \partial(c_i).$$

2. c est en fait la restriction à I^k d'une fonction lisse définie sur un voisinage de I^k

On a maintenant tous les éléments pour énoncer le théorème de Stokes :

Théorème 4.6.4 Si $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ et C est une k -chaîne de U alors

$$\int_C d\omega = \int_{\partial(C)} \omega.$$

Lorsque $k = 1$ et $C = c$ un cube singulier de dimension 1 (ie un arc paramétré lisse) ce théorème dit que $\int_c df = f(c(1)) - f(c(0))$. On retrouve la formule vue précédemment et le "théorème fondamental de l'analyse".

Preuve On commence par considérer le cas où $C = I^k$ et $\omega = f dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^k$ pour un certain i .

On remarque que $I_{(j,\alpha)}^k * \omega = 0$ si $i \neq j$ et que $I_{(j,\alpha)}^k * \omega = f(x^1, \dots, \alpha, \dots, x^{k-1}) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1}$ si $i = j$. Par ailleurs, comme le segment $[0, 1]$ est de longueur 1,

$$\int_{I^{k-1}} f(x^1, \dots, \alpha, \dots, x^{k-1}) dx^1 \dots dx^{k-1} = \int_{I^k} f(x^1, \dots, \alpha, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k$$

Ainsi

$$\int_{\partial I^k} \omega = \sum_{j=1}^k \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{\alpha+j} \int_{I^{k-1}} I_{(j,\alpha)}^k * \omega = \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{I^k} f(x^1, \dots, \alpha, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k.$$

Comme $d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$, on a

$$\int_{I^k} d\omega = (-1)^{i-1} \int_{I^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \dots dx^k.$$

Comme

$$\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = f(x^1, \dots, 1, \dots, x^k) - f(x^1, \dots, 0, \dots, x^k),$$

en appliquant le théorème de Fubini (en intégrant tout d'abord par rapport à x^i) on obtient

$$\int_{I^k} d\omega = \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i-\alpha} \int_{I^k} f(x^1, \dots, \alpha, \dots, x^k) dx^1 \dots dx^k = \int_{\partial I^k} \omega.$$

Le cas où ω est une $(k-1)$ forme quelconque s'en déduit facilement. On suppose maintenant que C est un cube singulier c de dimension k de E . On déduit facilement de la définition de l'intégrale d'une forme sur une chaîne singulière que

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega.$$

On a donc

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Ce qui montre le théorème de Stokes pour les cubes. On en déduit le cas où C est une k -chaîne $\sum a_i c_i$:

$$\int_C d\omega = \sum_i a_i \int_{c_i} d\omega = \sum_i a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial C} \omega. \quad \square$$

On a montré au paragraphe précédent qu'une forme fermée n'était pas exacte en l'intégrant sur le cercle unité qui est un certain cube singulier de dimension 1. Grâce au théorème de Stokes on peut faire de même pour des formes de degré supérieur :

Exercice 5 Soit $c : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ le cube singulier défini par

$$c(u, v) = (\cos(2\pi u) \sin(2\pi v), \sin(2\pi u) \cos(2\pi v), \sin(2\pi v)).$$

1) Montrer que $\int_{\partial c} \alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$.

2) Soit $\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} (x dy \wedge dz - y dx \wedge dz + z dx \wedge dy)$.

Montrer que ω est fermée et que

$$\int_c \omega \neq 0.$$

En déduire que β n'est pas exacte et que $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{R}^3$.